

UNIVERSIDAD CARLOS III MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

GRADO EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TÉRMICA Y DE FLUIDOS



TRABAJO DE FIN DE GRADO:

**ESTUDIO NUMÉRICO DE LA TRASLACIÓN DE BURBUJAS DEBIDA A
DEFORMACIONES NO ESFÉRICAS DE SU ENTREFASE**

Pablo Ramos González

Tutora: Elena Igualada Villodre

RESUMEN

El presente trabajo de fin de grado aborda el estudio de la traslación de burbujas provocada por los efectos físicos que aparecen al someterlas a un campo de presión externo. En particular, se estudia el desplazamiento de las burbujas que tiene lugar durante la etapa de colapso en los casos en los que no se mantiene la simetría esférica de la burbuja durante su compresión, llegando incluso a la formación de chorros (jets). El motivo de la realización de este estudio es la gran importancia que tiene el movimiento de traslación de burbujas forzado en el marco de diferentes aplicaciones, principalmente médicas.

A lo largo de la memoria se exponen, en primer lugar, los resultados experimentales que dieron lugar a este estudio. A continuación se propone un modelo físico simplificado del problema para su posterior resolución numérica, exponiendo las ecuaciones teóricas que rigen el comportamiento tanto del líquido como de la burbuja, así como las hipótesis utilizadas y la adimensionalización propuesta. En última instancia se describe el proceso de resolución numérica llevado a cabo con ayuda del solver de fluidos Gerris y se muestran los resultados numéricos obtenidos para dos casos diferentes, uno de ellos en el que la burbuja se deforma asimétricamente pero no llega a la formación de jet y otro, en el que además de deformarse sin mantener la simetría esférica, se alcanza la formación de jet. Para finalizar se realiza una comparación cualitativa entre estos resultados numéricos y los experimentales.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN	6
2. MOTIVACIÓN: RESULTADOS EXPERIMENTALES	10
2.1. CONFIGURACIÓN EXPERIMENTAL	10
2.1.1. PRINCIPIO DE OPERACIÓN	10
2.1.2. COMPONENTES	11
2.2. MEDICIÓN Y TRATAMIENTO DE DATOS.....	14
2.2.1. PARÁMETROS INICIALES	14
2.2.2. SEGUIMIENTO DE LA POSICIÓN DE LA BURBUJA	15
2.2.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES.....	16
3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA: MODELO FÍSICO	22
3.1. MODELO SIMPLIFICADO	22
3.2. DINÁMICA DE LA BURBUJA.....	27
3.3. ADIMENSIONALIZACIÓN	32
3.4. FUENTE DE ASIMETRÍA	34
4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA	36
4.1. PROCESO DE RESOLUCIÓN.....	36
4.1.1. PARÁMETROS FÍSICOS	36
4.1.2. PARÁMETROS DE SIMULACIÓN.....	37
4.1.3. CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN.....	39
4.2. CASO DE UNA BURBUJA CON DEFORMACIÓN NO SIMÉTRICA SIN FORMACIÓN DE JET .	40
4.3. CASO DE UNA BURBUJA CON DEFORMACIÓN NO SIMÉTRICA CON FORMACIÓN DE JET	47
5.- ANÁLISIS ECONÓMICO DEL PROYECTO.....	55
6.- CONCLUSIONES	57
BIBLIOGRAFÍA.....	60

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1.: Colapso y formación de jet	7
Figura 1.2.: Sonoporación	8
Figura 1.3.: Esquema de litotricia extracorpórea	8
Figura 2.1.1.1.: Principio de operación	10
Figura 2.1.2.1.: Esquema de la configuración	12
Figura 2.1.2.2.: Tubería y bomba de evacuación	13
Figura 2.1.2.3.: Aplicación de la función de Gauss, con una altura de impacto de 10mm y $P_i = P_{vap}$	14
Figura 2.2.2.1.: Secuencia de video de alta velocidad que muestra la trayectoria de una burbuja de radio $R_0 = 30\mu m$ ascendiendo en agua y que se propaga en la dirección horizontal bajo los efectos de pequeños impulsos ultrasónicos	15
Figura 2.2.3.1.: Velocidad-tiempo de una burbuja que conserva la simetría esférica tras el colapso.....	17
Figura 2.2.3.2.: Momento de máxima expansión de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas sin llegar a la formación de jet	18
Figura 2.2.3.3.: Colapso de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas sin llegar a la formación de jet	18
Figura 2.2.3.4.: Velocidad-tiempo de una burbuja que no mantiene la simetría esférica tras el colapso y forma jet.....	19
Figura 2.2.3.5.: Momento de máxima expansión de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas llegando a formar jet	20
Figura 2.2.3.6.: Colapso de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas llegando a formar jet	20
Figura 2.2.3.7.: Jet de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas	21
Figura 3.2.1.: Esquema de temperaturas y presiones de la burbuja	28
Figura 3.2.2.: Disposición de presiones en la burbuja	30
Figura 3.4.1.: Mallado de la representación de la situación inicial de la burbuja	34
Figura 3.4.2.: Mallado de la representación tras el colapso de la burbuja	35
Figura 4.1.2.1.: Dominio de computación formado por dos cajas obtenido a partir del software de computación Visit	38
Figura 4.2.1.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0$	41
Figura 4.2.2.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0,5$	42
Figura 4.2.3.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0,7$	43
Figura 4.2.4.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0,8$	43
Figura 4.2.5.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0,9$	43
Figura 4.2.6.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 1$	44

Figura 4.2.7.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 1,05$	44
Figura 4.2.8.: Gráfica de la velocidad de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet con respecto al tiempo adimensional de colapso	45
Figura 4.2.9.: Gráfica del volumen de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet con respecto al tiempo adimensional de colapso	46
Figura 4.3.1.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0$	48
Figura 4.3.2.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0,5$	48
Figura 4.3.3.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0,7$	49
Figura 4.3.4.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0,8$	49
Figura 4.3.5.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0,9$	50
Figura 4.3.6.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 1$	50
Figura 4.3.7.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 1,05$	51
Figura 4.3.8.: Gráfica de la velocidad de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet con respecto al tiempo adimensional de colapso	52
Figura 4.3.9.: Gráfica del volumen de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet con respecto al tiempo adimensional de colapso	53
Figura 4.3.10.: Comparación de la velocidad entre una burbuja que no mantiene la simetría esférica tras el colapso y no llega a formar jet y otra que sí alcanza la formación de jet	54
Figura 6.1.: Comparación de la velocidad de una burbuja con deformaciones no esféricas de su entrefase sin formar jet. Izquierda: Resultados experimentales. Derecha: Resultados teóricos	57
Figura 6.2.: Comparación de la velocidad de una burbuja con deformaciones no esféricas de su entrefase formando jet. Izquierda: Resultados experimentales. Derecha: Resultados teóricos	58

1. INTRODUCCIÓN

El proyecto expuesto tiene como objetivo el estudio del movimiento de traslación de burbujas como consecuencia de los efectos físicos que aparecen al estar sometidas a un campo de presión externo. En particular nos centraremos en la traslación que tiene lugar durante su colapso cuando la compresión se produce sin mantener la simetría esférica.

Una burbuja es un volumen de gas encerrado por una película fina que lo separa de otro fluido circundante. Así pues, no es posible entender la existencia de una burbuja como fruto de una única fase termodinámica (gas, líquido y sólido), ya que se requiere de dos de ellas para su formación. Las burbujas pueden contener cualquier gas o también pueden tener en su interior vapor de agua. Generalmente adquieren una forma esférica debido a la tensión superficial, ya que las burbujas buscan la mínima superficie posible para equilibrar su tensión, y la esfera es la figura tridimensional que hace mayor su volumen haciendo menor su área.

La aparición de burbujas de vapor en un líquido puede ser debida a diferentes orígenes. El estado de éstas está principalmente controlado por su temperatura y presión, y estos parámetros pueden inducir a un cambio de estado. Un incremento de temperatura, rebasando la temperatura de ebullición, es el modo más común de vaporización de un líquido y, por tanto, de creación de burbujas. Pero la aparición de burbujas de vapor en un líquido también puede producirse si la presión cae por debajo de la presión de vapor saturado; fenómeno denominado cavitación. Las burbujas se mueven a través del líquido debido al efecto producido por otras fuerzas de presión externas sobre ellas. En el caso estudiado, y ya que el trabajo expuesto considera la presencia de burbujas en un líquido, se estudiará, la burbuja como consecuencia de un volumen de gas rodeado por una fase líquida, y su movimiento de traslación debido a los cambios de presión que aparecen sobre ellas.

El comportamiento de las burbujas y su colapso puede ser controlado gracias al uso de ultrasonidos. La excitación de las burbujas con un campo de presión ultrasónico provoca que éstas experimenten oscilaciones en su volumen debido al gradiente de presión externo. Pero, como se ha mencionado anteriormente, además de sufrir oscilaciones radiales, las burbujas también sufren una traslación neta en la dirección de propagación de la onda que permite su uso en diversas aplicaciones, como es el caso de burbujas como transportadoras de medicamentos en el torrente sanguíneo. La fuerza externa que actúa sobre la burbuja bajo estas condiciones se denomina fuerza de radiación acústica, y es una fuerza periódica cuya magnitud y dirección varían con la frecuencia acústica.

$$F_{rad}(t) = -\frac{4}{3}\pi R^3(t)\nabla P_{\infty}(t)$$

Así, la burbuja experimenta una traslación oscilatoria alrededor de una posición de equilibrio que se va desplazando lentamente. El promedio temporal de la fuerza de radiación acústica al cabo de varios ciclos es no nulo y da lugar a una fuerza neta, que se conoce como fuerza de Bjerknes. Esta fuerza es el efecto físico que permite desplazar la burbuja hacia objetivos específicos en el sistema circulatorio en las aplicaciones médicas.

$$F_b(t) = - \left\langle \frac{4}{3} \pi R^3(t) \nabla P_{\infty}(t) \right\rangle$$

Pero la fuerza de Bjerknes es una fuerza definida para burbujas que conservan su simetría esférica. En este trabajo se estudiará su traslación al estar sometida a un cambio de presión brusco en el que la burbuja no mantiene esta simetría.

Cuando los cambios de presión son muy bruscos, la burbuja no mantiene la simetría esférica y puede incluso llegar a formar jets (chorros) en uno de los extremos de la burbuja durante el colapso. En la siguiente figura se observan las distintas fases de un colapso asimétrico con formación de jet.

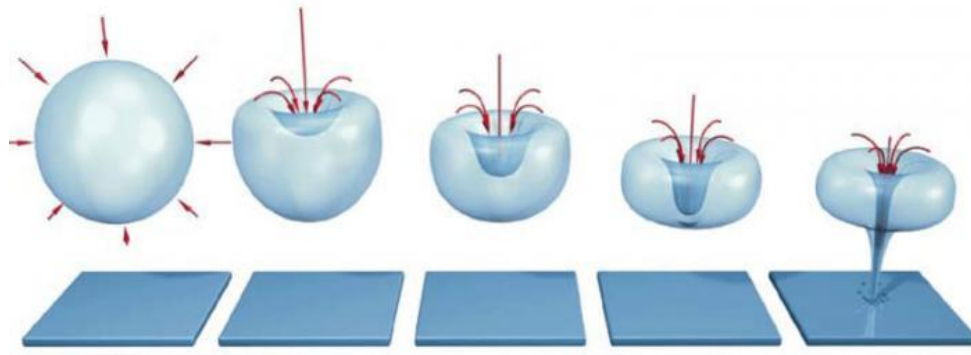


Figura 1.1.: Colapso y formación de jet

Se observa que en estas circunstancias la traslación de las burbujas se ve incrementada durante el colapso, y estos son precisamente los casos sobre los que basaremos el estudio en este trabajo. La energía involucrada en el colapso, así como el movimiento de traslación que presentan las burbujas, pueden ser de gran utilidad en diversas aplicaciones.

La disciplina principal donde cobra mayor importancia y donde se encuentra en la actualidad en proceso de investigación es la medicina. La llamada “*drug-delivery*”[1] (uso de burbujas como transportadoras de medicamentos) es un método que permite suministrar medicación a un paciente de manera más concentrada en unas partes del cuerpo que en otras, consiguiendo así una interacción entre el fármaco y el tejido dañado más directa, y evitando además cualquier posible daño al tejido sano. Las ventajas de este tipo de medicación son la reducción de las dosis recibidas por el paciente, la disminución en consecuencia de los posibles efectos secundarios provocados por el fármaco y la reducción de éste en el sistema circulatorio.

Se utiliza por tanto en numerosas enfermedades como enfermedades cardiovasculares o diabetes. Sin embargo, su aplicación más destacada es el tratamiento de tumores cancerígenos. El proceso seguido se llama sonoporación, y está basado en la rotura de membranas celulares para conseguir la liberación del contenido celular. La onda enviada actúa sobre la microburbuja encargada de transportar el fármaco y ésta implosiona en el momento justo interviniendo en la zona concreta buscada, tal y como se muestra en la “Figura 1.2.”.

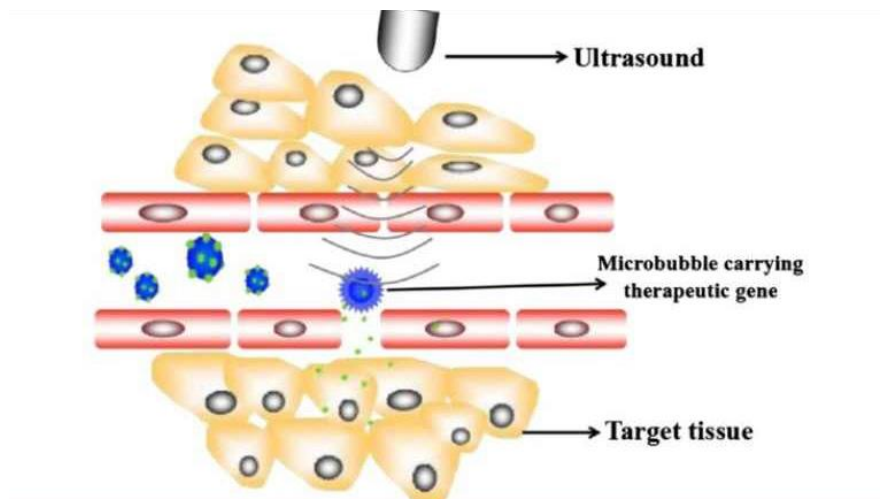


Figura 1.2.: Sonoporación

Gracias al control de las burbujas se es capaz de llevar también a cabo otros tratamientos como la litotricia; operación consistente en la pulverización de piedras o cálculos renales de la vejiga, riñón o vesícula biliar[2]. La onda provoca la cavitación en burbujas alrededor del cálculo, lo cual lleva a su fragmentación en piezas más pequeñas que pueden pasar fácilmente a través del uréter. A medida que la onda viaja hacia la zona focal (cálculo renal en este caso), la densidad del flujo de energía se incrementa, hasta hacerse máxima en el foco, provocando así un alto cambio de presión que permite que se fraccione el cálculo.

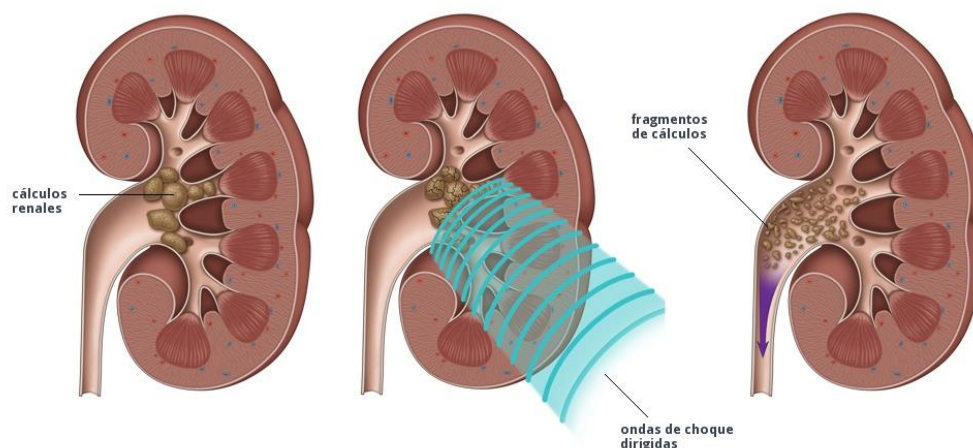


Figura 1.3.: Esquema de litotricia extracorpórea

Estos avances también tienen un uso industrial, que además de ser útil en la síntesis de compuestos, el colapso de las burbujas juega un papel importante en el proceso de mezclado en reactores químicos. Este proceso se denomina sonoquímica[3] y estudia la capacidad de la energía transportada por las ondas para provocar y acelerar reacciones químicas. Cuando las ondas actúan sobre un determinado líquido, en éste se generan miles de pequeñas burbujas que producen a su vez alteraciones de presión y temperatura. En los bordes de estas burbujas se pueden alcanzar temperaturas de miles de grados centígrados durante las pocas milésimas de segundo que tienen de existencia. En este tiempo se producen una gran cantidad de reacciones químicas que pueden cambiar la estructura química del líquido. Estos efectos

también se pueden aplicar sobre algunos metales sólidos, tales como el cobre, aunque su efecto es menos notorio. Es un tratamiento muy efectivo para el aumento en la radioactividad de catalizadores y reactivos. Un ejemplo de su uso como síntesis de nuevos compuestos es la obtención de hidrocarburos a partir del pentacarbilo de hierro. Otras de las aplicaciones industriales sobre las que surge efecto la sonoquímica son el tratamiento de residuos o de aguas residuales, el control y monitoreo de la contaminación del aire y la limpieza de algunas superficies, todas ellas a partir de la fractura de moléculas orgánicas indeseables.

Es importante destacar que para el caso de las aplicaciones médicas, la magnitud de las ondas de presión usadas para excitar las burbujas debe estar controlada ya que van dirigidas a seres vivos y células que no son capaces de soportar cualquier tipo de onda. Sin embargo, para el caso de las aplicaciones industriales, se puede trabajar con ondas de presión más fuertes y así poder generar colapsos más bruscos.

La importancia del proceso de colapso de las burbujas y de su traslación durante esta etapa, en especial en las aplicaciones médicas citadas, es la motivación que nos ha llevado a realizar este trabajo.

2. MOTIVACIÓN: RESULTADOS EXPERIMENTALES

En el marco de su tesis mi tutora llevó a cabo una serie de experimentos como primer paso para abordar el estudio de la traslación de burbujas durante la etapa de colapso. Estos experimentos se basan en someter a las burbujas generadas por electrólisis del agua a un cambio brusco de presión, consistente en un tren de ondas de expansión-compresión y grabar su comportamiento para su posterior análisis.

2.1. CONFIGURACIÓN EXPERIMENTAL

2.1.1. PRINCIPIO DE OPERACIÓN

La instalación experimental consiste en la excitación de un sistema basado en un cilindro, inicialmente lleno de líquido hasta una determinada altura, en el que aparecen burbujas de gas. El método para transferir una gran cantidad de energía al sistema y excitarlo se realiza mediante un tren de ondas de presión que actúa sobre las burbujas de gas. Con el fin de generar estas ondas se usa un pistón (que ejerce un fuerte impacto sobre la superficie libre del líquido) conectado a un electroimán por medio de un gato hidráulico, que a su vez, está conectado a un computador que permite establecer la posición inicial precisa del pistón y el instante concreto en el que se libera el electroimán. De este modo se realiza un estudio sobre la deformación y el desplazamiento que sufren las propias burbujas y que tiene interés en las aplicaciones anteriormente mencionadas.

El funcionamiento del experimento llevado a cabo, consistente en el disparo del pistón para generar el tren de ondas de presión que actuará sobre las burbujas está esquematizado en la “Figura 2.1.1.1.” y consiste en:

- Situar el pistón con el electroimán encima del líquido a una altura determinada h .
- Crear vacío entre la superficie del líquido y el pistón.
- Dejar caer el pistón.

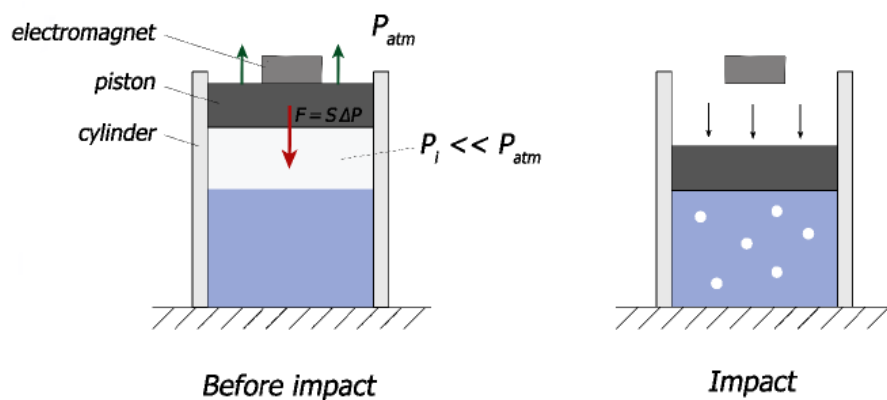


Figura 2.1.1.1.: Principio de operación

La diferencia de presión a ambos lados del pistón provoca la aparición de una fuerza desde el pistón hacia la columna de líquido. Cuando el electroimán se apaga, el pistón, que tiene libertad de movimiento, cae golpeando fuertemente la superficie del líquido. Este fuerte impacto vertical repentino produce una intensa onda de compresión-expansión-compresión que somete a las burbujas a una secuencia de procesos de expansión y colapso hasta que la onda se amortigua totalmente.

2.1.2. COMPONENTES

A continuación se describen los diferentes componentes de la instalación experimental, explicando la función de cada uno de ellos para poder llevar a cabo los experimentos explicados. Todos ellos se ven reflejados en la “Figura 2.1.2.1.” para entender mejor su disposición en el sistema.

Los dos componentes principales son el cilindro y el pistón:

- Cilindro: Se pueden emplear dos tipos de cilindros, uno transparente y otro opaco. El transparente es utilizado para poder ver la respuesta de las burbujas ante el impacto y poder grabarlas. Sin embargo, éste es frágil, y para impactos fuertes (altura de impacto superior a 6 mm) es necesaria la utilización del cilindro opaco, de acero inoxidable y capaz de soportar impactos mayores.

Ambos tienen las mismas dimensiones:

- Diámetro: 75 mm
 - Espesor: 13 mm
 - Altura: 125 mm
- Pistón: Tiene una geometría interior compleja, debido especialmente al imán, la sección del tubo de evacuación de aire, y el sensor de presión contenido en él. Exteriormente, sin embargo, tiene forma cilíndrica, con unas dimensiones de:
 - Diámetro: 75 mm
 - Peso: 485 g

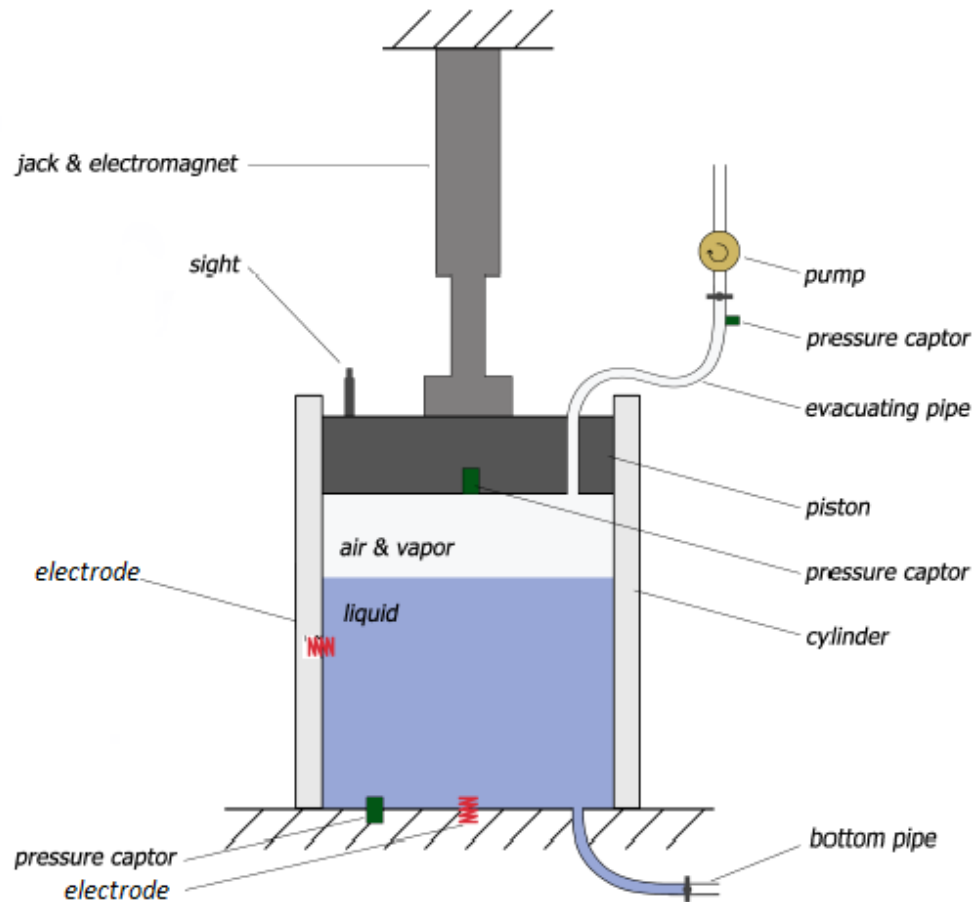


Figura 2.1.2.1.: Esquema de la configuración

Para controlar el pistón y el disparo se utilizan los siguientes elementos:

- Electroimán y gato hidráulico: El electroimán está en contacto con el pistón mientras se suministra electricidad. Está unido por su parte de arriba al gato hidráulico, a su vez conectado a un ordenador. La posición del electroimán, y en consecuencia la del pistón, es controlada por este ordenador. Mediante un pequeño programa desarrollado en Visual Basic se permite el control de una forma fácil y automática de la posición del pistón y se es capaz de realizar las funciones requeridas.
- Tubo y bomba de evacuación: El tubo de evacuación, que pasa a través del pistón, conecta el vacío de encima del líquido con el exterior y con la bomba. Así se puede regular la presión bajo el pistón antes de su lanzamiento.
Este dispositivo requiere de una muy buena precisión debido a la dificultad de mantener el vacío entre el líquido y el pistón. Esto se debe a la vaporización del líquido: la presión mínima alcanzable es la presión de vapor saturado del líquido utilizado.



Figura 2.1.2.2.: Tubería y bomba de evacuación

Otro componente es el encargado del control de los parámetros del líquido:

- Tubo inferior: Tiene como función la de llenar y vaciar el cilindro. Además tiene una segunda aplicación: cuando el espacio sobre el líquido está bajo presión, este tubo puede utilizarse para introducir aire en el líquido.

Componentes de medición:

- Sensores de presión: Tres sensores son colocados en distintos puntos de la estructura para la obtención de medidas en diferentes puntos importantes del sistema:
 - En la tubería de evacuación: Mide la presión de vapor entre el líquido y el pistón. Gracias a este sensor se es capaz de conocer la presión interior inicial antes de liberar el pistón. Tiene un fondo de escala de 5/6 bares, por lo que tiene una buena precisión.
 - Debajo del pistón: Se ocupa de la presión del pistón. Este sensor tiene un rango de 1000 bares, lo que permite impactos muy fuertes. Sin embargo, la exactitud de la señal no es muy rigurosa.
 - En el fondo: Mide la presión debajo de la columna de líquido.

La señal de presión original obtenida por el osciloscopio está sujeta a un pequeño error de medida variable debido a la inexactitud de los sensores situados en el interior del cilindro, resistentes pero imprecisos. Para conseguir señales con mejores resultados, se aplica a dichas señales una función gaussiana para suavizarlas, como se muestra en la “Figura 2.1.2.3”.

Estos sensores se utilizan para tener una idea de la presión a la que están sometidas las burbujas durante el impacto del pistón.

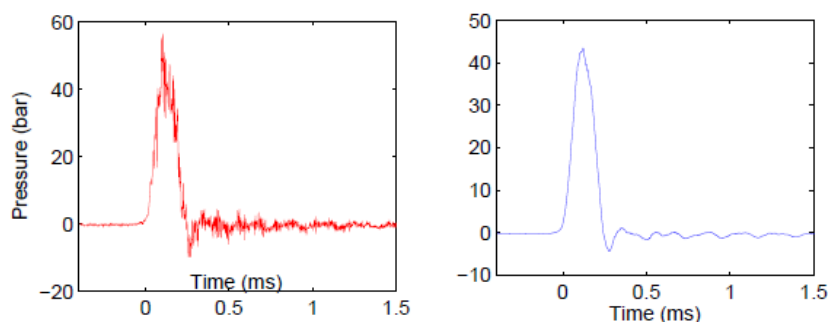


Figura 2.1.2.3.: Aplicación de la función de Gauss, con una altura de impacto de 10mm y $P_i = P_{vap}$

- Cámara: Se utiliza para poder visualizar el colapso y expansión de burbujas en el líquido. Se debe estar trabajando con el cilindro transparente.

Otros componentes son los encargados de provocar la aparición de burbujas:

- Electrodo: Se colocan dos electrodos que provocan la generación de burbujas a partir de la electrólisis del agua, proceso electroquímico que tiene como objetivo la división del agua en hidrógeno (H_2) y oxígeno (O_2). La electrólisis consiste en hacer pasar corriente entre los dos electrodos (situados tal y como se indica en la “Figura 2.1.2.1.”), un cátodo, que es el negativo, y un ánodo, el positivo. Al activar la corriente ambos electrodos presentan desprendimiento de gases: por el cátodo se desprende hidrógeno, y por el ánodo lo hace oxígeno. Generalmente se utiliza ácido sulfúrico o sulfato de sodio (ambos diluidos) que, al suministrar iones funcionan como catalizadores de la reacción y aceleran el proceso de desprendimiento de gases. Así se consiguen las burbujas necesarias para llevar a cabo el experimento planteado.

2.2. MEDICIÓN Y TRATAMIENTO DE DATOS

Los datos obtenidos a partir del experimento descrito son las presiones en la superficie del pistón y en el fondo de la columna de líquido del cilindro además de las imágenes tomadas por la cámara. Para el procesamiento de esta información se utiliza Matlab. Se requiere además de unos parámetros iniciales que se deben fijar para caracterizar cada caso.

2.2.1. PARÁMETROS INICIALES

Los parámetros fijados inicialmente que pueden irse modificando entre los diferentes casos son los siguientes:

- Características del líquido utilizado: densidad ρ y módulo de compresibilidad K . El líquido normalmente utilizado es agua. Mediante la fijación de estos dos parámetros se puede calcular también la velocidad del sonido en el líquido:

$$c = \sqrt{K/\rho}$$

En el caso del agua el sonido viaja a unos 1500 m/s, aunque como se ha mencionado, ésta varía en función de otros parámetros.

- Altura del impacto, ajustada mediante el gato hidráulico.
- Presión inicial, regulada por medio del tubo de evacuación. Cuanto menor es su valor más fuerte es el impacto. Como el objetivo del diseño es generar ondas intensas, la presión inicial está siempre cerca de su valor mínimo: la presión de vapor saturado del líquido.
- Altura del líquido, regulada por la tubería inferior. La altura estándar utilizada es 40 mm para todos los experimentos.

2.2.2. SEGUIMIENTO DE LA POSICIÓN DE LA BURBUJA

Para poder analizar el movimiento de las burbujas debido al efecto del tren de ondas de presión, éstas son grabadas con una cámara de alta velocidad, que permite grabar hasta cientos de miles de imágenes por segundo. Las imágenes obtenidas son tratadas y se calcula la posición, captura a captura, por medio de un programa de detección automática codificado en Matlab. El postproceso de las imágenes consiste en cargar éstas e identificar la burbuja mediante los niveles de gris de la propia imagen, y así delimitarla. Se fija un cierto tono de gris a partir del cual se considera que pertenece a la burbuja, tal y como se muestra en la siguiente “Figura 2.2.2.1.”. La región contenida en la circunferencia roja es la que es considerada burbuja.

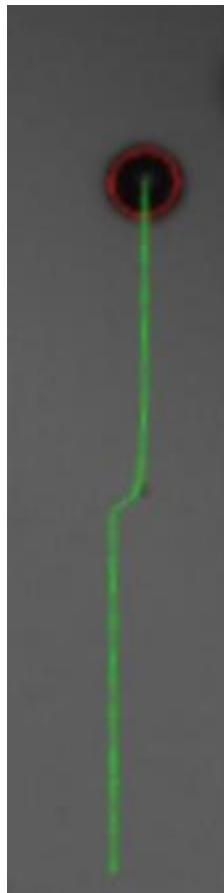


Figura 2.2.2.1.: Secuencia de video de alta velocidad que muestra la trayectoria de una burbuja de radio $R_0 = 30\mu\text{m}$ ascendiendo en agua y que se propaga en la dirección horizontal bajo los efectos de pequeños impulsos ultrasónicos

De ésta región delimitada se calcula su centro de masas y se guarda la posición de éste en todas las imágenes del video grabado. Con estos datos se construye un vector encargado de almacenar las posiciones del centro de gravedad mientras la onda de presión actúa sobre la burbuja. Se obtiene así la evolución de la posición de la burbuja y, con ello, la velocidad.

2.2.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES

El fuerte impacto generado por el pistón provoca la propagación dentro del cilindro de una serie de ondas acústicas. La amplitud y la frecuencia generadas tras el impacto son esenciales para determinar las características de la excitación de las burbujas. Se genera una estela de ondas una vez se ha producido la caída del pistón, de intensidad del orden de 1 atmósfera. Este fuerte impacto provoca un colapso muy brusco que da lugar en la mayoría de los casos a deformaciones no esféricas de la interfase de la burbuja. En algunos casos, si la magnitud del impacto es muy grande puede llegar a formar jets o chorros.

En todos los casos, haya o no formación de jet, y se mantenga o no la simetría esférica, se producen importantes desplazamientos de la burbuja durante el colapso. Cuando se conserva la simetría esférica es la fuerza de Bjerknes la que actúa, y, si la simetría se pierde, aunque no se alcance la formación de jet, también se siguen produciendo estos desplazamientos.

A continuación se muestran dos casos diferentes de dos burbujas en las que se representa la velocidad de traslación con respecto al tiempo, con el fin de exponer dos ejemplos que demuestren lo explicado anteriormente.

Para la adimensionalización del tiempo, representado en el eje de abscisas, se utiliza el tiempo de implosión o de colapso, definido como el tiempo que tarda la burbuja en alcanzar su volumen mínimo. La velocidad queda adimensionalizada mediante el tiempo de colapso definido y una distancia: escogida como tal el radio máximo de la burbuja, coincidente con el radio inicial.

BURBUJA CON DEFORMACIÓN NO SIMÉTRICA SIN FORMACIÓN DE JET

El primer caso estudia la velocidad de una burbuja que, tras el colapso, ha mantenido aproximadamente la simetría esférica. Bien es cierto que no podemos afirmar que la simetría esférica es perfecta porque la variación de volumen de la burbuja es muy grande. El colapso sufrido no es lo suficientemente brusco, y, por tanto, se trata de un caso con una ligera deformación no simétrica.

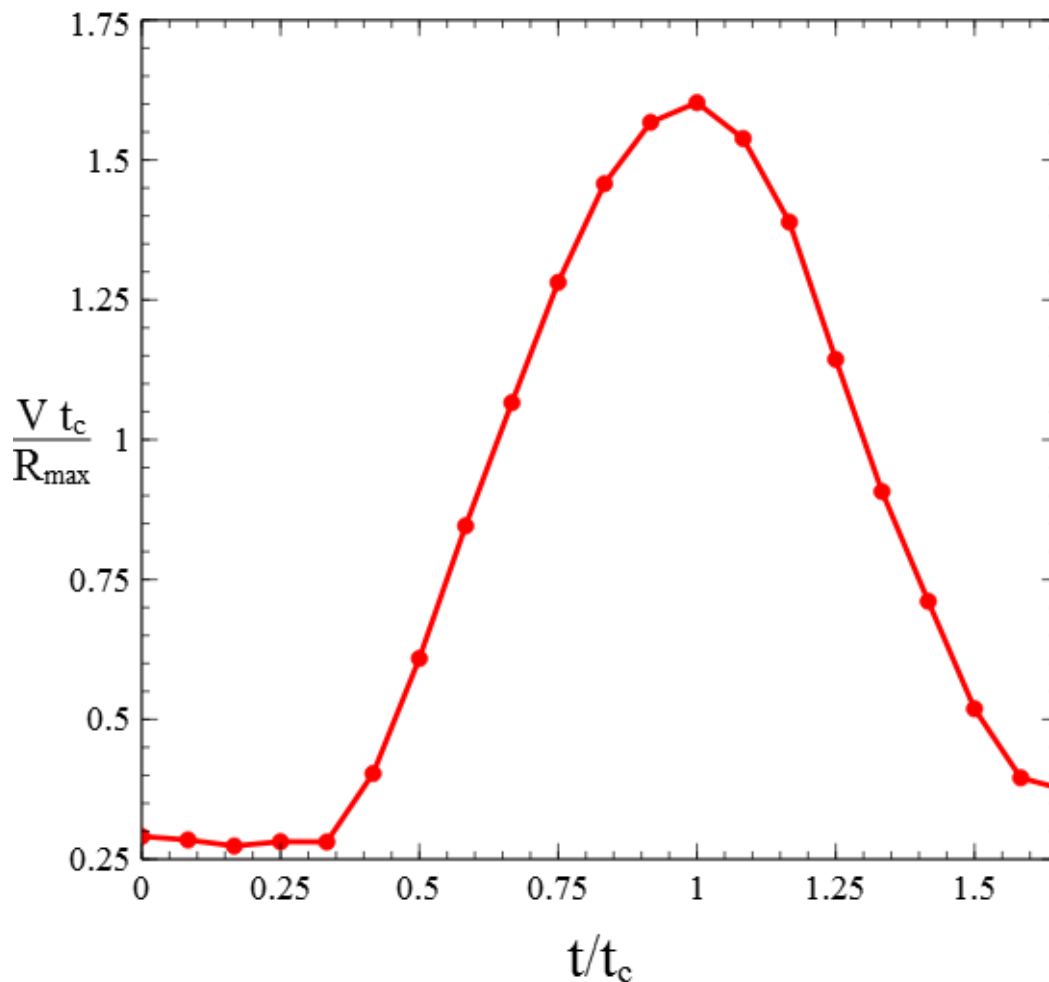


Figura 2.2.3.1.: Velocidad-tiempo de una burbuja que conserva la simetría esférica tras el colapso

Se muestran a continuación dos imágenes sacadas a partir del experimento real que representan la expansión y la compresión máxima, alcanzada durante la etapa de colapso.



Figura 2.2.3.2.: Momento de máxima expansión de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas sin llegar a la formación de jet

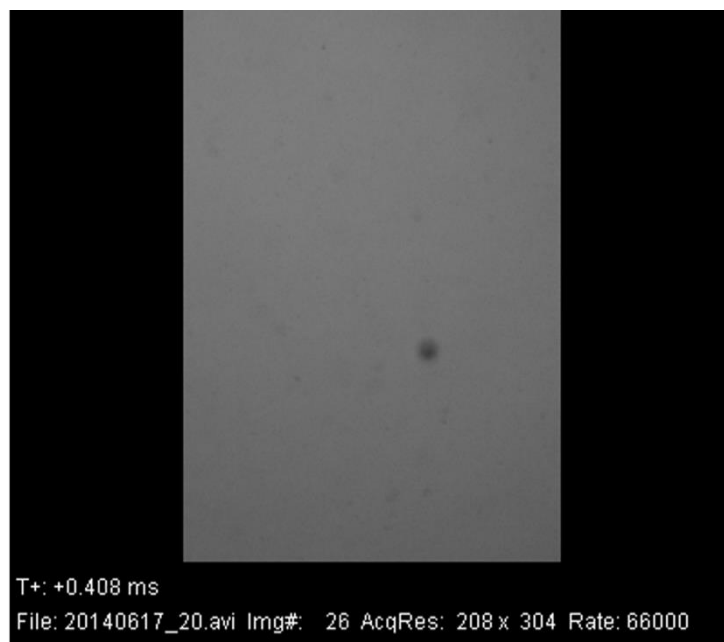


Figura 2.2.3.3.: Colapso de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas sin llegar a la formación de jet

La primera de ellas, “Figura 2.2.3.2”, es el momento en el que la burbuja alcanza el volumen máximo, y tiene una forma esférica perfecta. Sin embargo, cuando la burbuja colapsa, en la “Figura 2.2.3.3.”, y llega al punto en el que su volumen se hace mínimo, se aprecian mejor las deformaciones que experimenta sin mantener la simetría.

BURBUJA CON DEFORMACIÓN NO SIMÉTRICA CON FORMACIÓN DE JET

En el segundo de los casos, por el contrario, la burbuja sufre un colapso muy brusco debido al fuerte impacto del pistón, llegando a perder la simetría esférica y formando incluso un jet o chorro. La trayectoria seguida por la velocidad de traslación experimenta cambios en tiempos algo más tardíos como se puede observar en la siguiente gráfica.

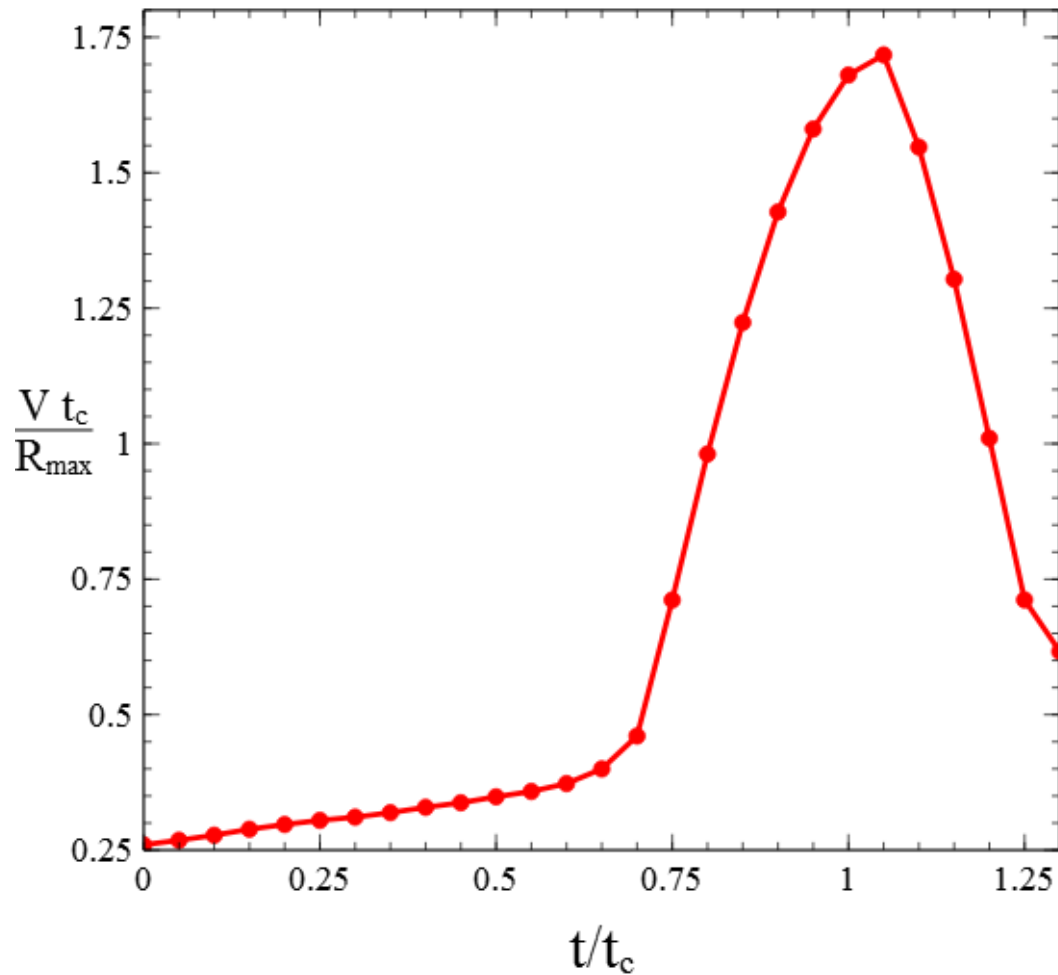


Figura 2.2.3.4.: Velocidad-tiempo de una burbuja que no mantiene la simetría esférica tras el colapso y forma jet

Para este caso se exponen también unas imágenes de un experimento real grabadas con una cámara de alta definición. Muestran igualmente los momentos de expansión y compresión máximos. Pero además, se añade una tercera imagen en la que se diferencia con claridad el jet formado por culpa de la fuente de asimetría existente.

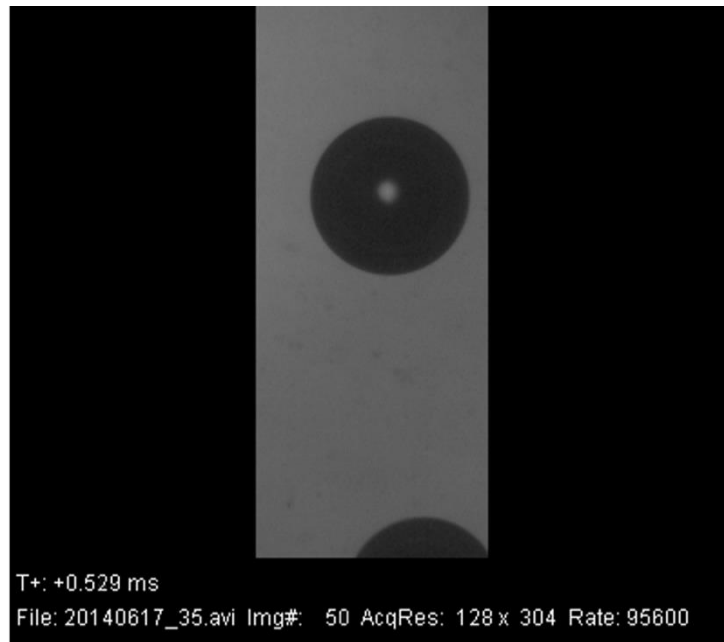


Figura 2.2.3.5.: Momento de máxima expansión de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas llegando a formar jet



Figura 2.2.3.6.: Colapso de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas llegando a formar jet



Figura 2.2.3.7.: Jet de una burbuja que experimenta deformaciones no esféricas

Al igual que en el caso anterior, en la “Figura 2.2.3.5.” se expone la burbuja en el momento de máxima expansión, instante en el que la burbuja es completamente esférica buscando el equilibrio de su tensión. En la “Figura 2.2.3.6.” por el contrario, presenta la compresión máxima, alcanzada en el tiempo de colapso. El jet se forma tras esta compresión, como se puede observar en la “Figura 2.2.3.7.”, en la que se forma el chorro en la dirección en la que actúa la fuente encargada de provocar la asimetría.

Entre los dos casos (con y sin formación de jet) se encuentran bastantes similitudes. Sin embargo, comparando la “Figura 2.2.3.1.” y la “Figura 2.2.3.4.” se puede apreciar que la aceleración de la burbuja es más progresiva en el caso en el que no se alcanza la formación de jet, sufriendo un cambio más repentino y, por tanto, alcanzando una mayor aceleración la burbuja que forma jet en el colapso. La máxima velocidad se alcanza en ambos casos en un tiempo algo superior a la unidad, correspondiente al instante en el que se produce el colapso de la burbuja, pero la magnitud de esta velocidad para el caso con jet es superior a la del caso sin jet, si bien es cierto que ambas se mantienen en el mismo orden de magnitud.

3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA: MODELO FÍSICO

En este capítulo se va a tratar de resolver el problema planteado numéricamente, utilizando para ello el solver de fluidos llamado Gerris.

Gerris es un programa de software desarrollado en el lenguaje C, dedicado a la mecánica de fluidos computacional y capaz de resolver las ecuaciones de Navier-Stokes en dos o tres dimensiones, lo que permite modelar fluidos industriales (aerodinámica, flujos internos, etc.) o por ejemplo el tema tratado en este trabajo, la mecánica de las burbujas, gracias a la posibilidad de tratar flujos multifásicos (teniendo en cuenta la tensión superficial). Gerris proporciona una solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales por el método de los volúmenes finitos. La mayoría de modelos utilizan o bien mallas estructuradas (mallas cartesianas o curvilíneas) o bien mallas no estructuradas (triangular, tetraédrica, etc.). Sin embargo, Gerris es diferente en este aspecto, presentando un modelo combinación de ambas posibilidades que permite refinar localmente. De hecho la malla puede variar a lo largo de la simulación para poder conseguir mayor precisión en los puntos donde se requiere y en los instantes de tiempo más relevantes.

3.1. MODELO SIMPLIFICADO

Como primer paso se explica el problema que se resuelve en Gerris: un modelo simplificado de la oscilación de una burbuja gaseosa en un líquido incompresible. En particular se resuelven las ecuaciones de conservación tridimensionales de Navier-Stokes para el líquido incompresible y para el gas compresible.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad explica la conservación de la masa en un volumen de control definido.

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \quad (\text{Ec. 3.1.1})$$

En el caso de la fase líquida se va a considerar que se trata de un líquido perfecto, cuya densidad es estrictamente constante; la condición de que el volumen no puede cambiar requiere que la divergencia de la velocidad sea nula en todos los puntos.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Sin embargo, el gas sí sufre una variación de densidad con el tiempo, por lo que para satisfacer la ecuación de continuidad se debe cumplir que

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = -\frac{\delta \rho}{\delta t} \neq 0$$

ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Esta ecuación deriva de la segunda ley de Newton, y relaciona la fuerza, la masa y la aceleración. La variación de cantidad de movimiento se debe tanto a la acción de fuerzas másicas como de fuerzas de superficie.

$$\frac{D(\rho\vec{u})}{Dt} = -\nabla P + \nabla \bar{\tau}' + \rho \bar{f}_m \quad (\text{Ec. 3.1.2})$$

donde:

$$\frac{D}{Dt} \equiv \text{Derivada sustancial}$$

$$\bar{\tau}' \equiv \text{Tensor de esfuerzos viscosos}$$

$$\bar{f}_m \equiv \text{Fuerzas másicas}$$

La derivada sustancial se define como:

$$\frac{D(\rho\vec{u})}{Dt} = \frac{\delta u}{\delta t} + u \cdot \nabla(\rho\vec{u}) \quad (\text{Ec. 3.1.3})$$

y permite calcular la variación de una magnitud fluida ligada a una partícula fluida. El primer término $\left(\frac{\delta u}{\delta t}\right)$ representa la variación de velocidad en un punto fijo del espacio, y por ello se denomina derivada local. El segundo término $(u \cdot \nabla(\rho\vec{u}))$ representa la variación de velocidad asociada al cambio de posición de la partícula fluida, y en consecuencia se denomina derivada convectiva.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD PARA LA FUNCIÓN DE COLOR

Pero además de tenerse que cumplir las ecuaciones de Navier-Stokes es necesario que se satisfaga la ecuación de continuidad para la llamada “función de color”. Esta función toma valores acotados entre cero y uno y sirve para determinar la fase existente en cada punto de la malla en la que se divide el dominio.

$$\frac{\delta c}{\delta t} + \nabla(cu) = 0 \quad (\text{Ec. 3.1.4})$$

donde:

$$c \equiv \text{función de color}$$

La función de color tomará el valor unidad cuando el punto estudiado sea en su totalidad gas, y tendrá valor nulo cuando se trate de líquido. Los puntos en los que su fase sea combinación de gas y líquido tomarán valores intermedios.

Esta función nos permite definir una densidad y un coeficiente de viscosidad dinámica particular para cada punto de tal forma que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_1 c + \rho_2 (1 - c) \\ \mu = \mu_1 c + \mu_2 (1 - c) \end{array} \right\}$$

donde:

$\rho_1 \equiv$ densidad del gas

$\rho_2 \equiv$ densidad del líquido

$\mu_1 \equiv$ coeficiente de viscosidad dinámica del gas

$\mu_2 \equiv$ coeficiente de viscosidad dinámica del líquido

Las propiedades del líquido, tanto viscosidad μ_2 como densidad ρ_2 , y la viscosidad del gas μ_1 , son constantes, mientras que la densidad del gas ρ_1 se impone que venga dada por la ecuación de estado de gas ideal:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

$$P = \rho \cdot \frac{R}{M} \cdot T = \rho \cdot R_g \cdot T \quad (\text{Ec. 3.1.5})$$

siendo M el peso molecular del gas estudiado.

Así queda definida la densidad del gas ρ_1 como función del volumen, la temperatura y el peso molecular del gas sobre el que se trabaja.

Pero definir la densidad del gas como una variable dependiente del volumen no es suficiente para introducir la compresibilidad del gas en Gerris. Además de esto, hay que definir el valor que ha de tomar la divergencia de la velocidad en la fase gaseosa, ya que la divergencia $(\nabla \cdot \vec{u})$ es la tasa de pérdida de masa por unidad de tiempo debido a la salida de fluido del volumen de control. Es decir, es la cantidad de volumen que abandona la unidad de volumen por unidad de tiempo (tasa de expansión), y por tanto está relacionada con el volumen variable de la burbuja[4].

Para calcular el valor de la divergencia de la velocidad partimos de la ecuación de continuidad (Ec. 3.1.1) expuesta con anterioridad:

$$\frac{\delta P}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \rho \nabla \cdot (\vec{u}) + u \nabla \rho = 0$$

Como se ha explicado previamente, la suma del primer y tercer término corresponde a la derivada sustancial (Ec. 3.1.3), obteniéndose de esta manera:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot (\vec{u}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\vec{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

donde $\rho = m/V$:

$$\nabla \cdot (\vec{u}) = -\frac{V}{m} \cdot \frac{D(m/V)}{Dt}$$

Se asume que la masa del sistema es constante, se conserva, por lo que:

$$\nabla \cdot (\vec{u}) = -V \cdot \frac{D(1/V)}{Dt} = -V \left[(-1)V^{-2} \frac{DV}{Dt} \right] = \frac{V}{V^2} \frac{DV}{Dt}$$

$$\nabla \cdot (\vec{u}) = \frac{1}{V} \cdot \frac{DV}{Dt} \quad (\text{Ec. 3.1.6})$$

A continuación se debe evaluar esta ecuación de continuidad en las dos partes que conforman nuestro sistema:

- El líquido
- La burbuja

LÍQUIDO

Se asume en este caso que se trata de un líquido perfecto incompresible:

$$\rho_l = cte \rightarrow \frac{D\rho_l}{Dt} = 0$$

$$[\nabla \cdot (\vec{u})]_{líq} = 0 \quad (\text{Ec. 3.1.7})$$

BURBUJA

Para el caso del gas se considera que la densidad es una función dependiente del tiempo de manera que: $\rho_b = \rho_b(t)$, ya que la burbuja cambia su volumen con el tiempo, pero se asume que la presión del gas es uniforme en el volumen de la burbuja. Además, tomando el gas como un gas ideal, como se ha demostrado anteriormente en la (Ec. 3.1.5), su presión vendrá dada por la expresión:

$$P = \rho R_g T$$

$$\rho = \frac{P}{R_g T}$$

La derivada temporal de la densidad será, en consecuencia:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \rho}{\delta t} &= \frac{\delta \left(\frac{P}{R_g T} \right)}{\delta t} = \frac{1}{R_g} \cdot \frac{\delta (P/T)}{\delta t} = \frac{1}{R_g} \left[\frac{\delta P}{\delta t} \cdot \frac{1}{T} - \frac{1}{T^2} \cdot P \cdot \frac{\delta T}{\delta t} \right] \\ \frac{\frac{\delta \rho}{\delta t}}{\rho} &= \frac{1}{\rho R_g T} \cdot \frac{\delta P}{\delta t} - \frac{P}{\rho R_g T} \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\delta T}{\delta t} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta P}{\delta t} &= \frac{\delta P / \delta t}{P} - \frac{\delta T / \delta t}{T}\end{aligned}\quad (\text{Ec. 3.1.8})$$

Considerando además que la temperatura de la burbuja no sufre variaciones de temperatura muy acusadas, se tiene:

$$\frac{\frac{\delta T}{\delta t}}{T} \ll \frac{\frac{\delta P}{\delta t}}{P}$$

entonces:

$$\frac{\delta \rho / \delta t}{\rho} \approx \frac{\delta P / \delta t}{P}$$

y considerando que la presión de la burbuja $P_g = P \equiv$ uniforme, tal y como se ha comentado al comienzo de la demostración, entonces:

$$\frac{\delta \rho / \delta t}{\rho}$$

será uniforme dentro de la burbuja y por tanto puede afirmarse que:

$$\frac{D\rho/Dt}{\rho} = \frac{\delta \rho / \delta t}{\rho} \quad (\text{Ec. 3.1.9})$$

Así pues, con todo esto, puede determinarse la divergencia de la velocidad en el interior de la burbuja como:

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{u}) &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\delta \rho}{\delta t} = -\frac{V}{m} \cdot \frac{\delta (m/V)}{\delta t} = -\frac{V}{m} \cdot m \cdot \frac{\delta (1/V)}{\delta t} = -V \cdot \frac{(-1)}{V^2} \cdot \frac{\delta V}{\delta t} = \\ &= \frac{\delta V / \delta t}{V} = (\nabla(\vec{u}))_{gas}\end{aligned}\quad (\text{Ec. 3.1.10})$$

Así queda demostrado que en la fase gaseosa se ha de imponer una fuente de divergencia que viene dada por:

$$\nabla \cdot \vec{u} = S = \frac{1}{V} \cdot \frac{\delta V}{\delta t} = \frac{\dot{V}}{V} \quad (\text{Ec. 3.1.11})$$

Repasando el procedimiento, se exponen las hipótesis consideradas para llegar a la solución de la divergencia de la velocidad final de la (Ec. 3.1.11):

- Despreciar la variación de temperatura del gas en el interior de la burbuja.
- Considerar que el gas mantiene una presión uniforme.
- La masa del sistema se conserva.

Así pues, la fuente de divergencia, \mathbf{S} , corresponde a la derivada en el tiempo del volumen del sistema dividido por el volumen del propio sistema. De este modo Gerris resuelve la burbuja como un elemento compresible que colapsa bajo la variación de volumen impuesta.

Pero es necesario conocer cuál es la variación del volumen impuesta sobre la burbuja. Una posibilidad es imponer una variación de volumen experimental, y a partir de ella realizar los estudios. Otra posibilidad, que será la llevada a cabo a lo largo de esta investigación, es trabajar con la variación de volumen obtenida a partir de modelos para la oscilación radial de la burbuja, como el de Rayleigh-Plesset, utilizado en este caso y explicado con detalle en el siguiente apartado.

3.2. DINÁMICA DE LA BURBUJA

En el estudio llevado a cabo, las burbujas están sometidas en primera instancia a una compresión brusca fruto del impacto del pistón sobre el líquido y, posteriormente, a un proceso de expansión significativa al verse alcanzadas por el tren de ondas. El trabajo se centra en el comportamiento de la burbuja durante esa primera etapa de colapso, hasta que alcanza su volumen mínimo.

El estudio analítico del movimiento de las burbujas en un flujo real es un problema muy complicado. Para su resolución, el físico inglés Rayleigh realizó unas determinadas hipótesis a principios del siglo XX que consiguen simplificar el modelo, y consiguió obtener una ecuación derivada de las ecuaciones de Navier-Stokes para una geometría esférica simétrica, conocida como la ecuación de Rayleigh[5]. Sin embargo no fue él, sino el físico estadounidense Milton S.Plesset quien aplicó estas ecuaciones al fenómeno de la cavitación para describir la trayectoria seguida por las burbujas. Las hipótesis que se tuvieron en cuenta para analizar el problema son las siguientes[6]:

- La densidad del líquido es constante y de valor ρ , tratándose así de un caso de un fluido incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$).
- La viscosidad dinámica del líquido es constante e igual a μ .
- A una distancia significativa de la burbuja, la temperatura y la presión son T_1 y p_1 respectivamente.
- La burbuja se considera una esfera perfecta.

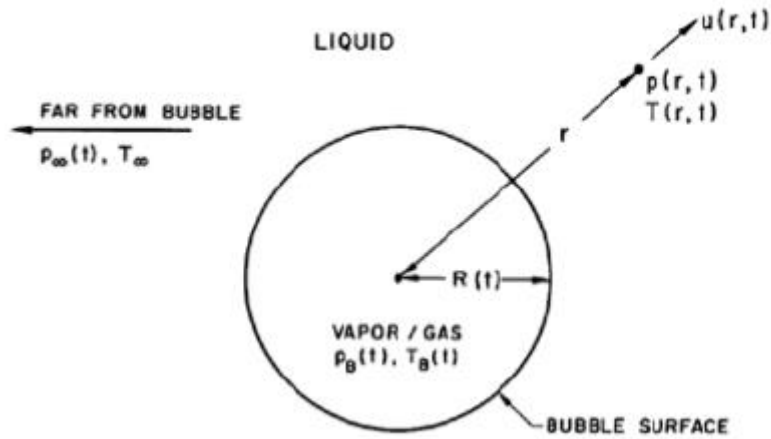


Figura 3.2.1.: Esquema de temperaturas y presiones de la burbuja

La situación descrita es la representada en la “Figura 3.2.1.”.

Se considera un punto genérico en el seno del fluido con una coordenada radial r , medida desde el centro de la burbuja. Este punto está caracterizado por una presión $p(r, t)$, una temperatura $T(r, t)$ y una velocidad $u(r, t)$. La frontera de la burbuja viene definida por la función $R(t)$. La ecuación de Rayleigh-Plesset se obtiene partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas esféricas, de forma que:

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Como hemos explicado anteriormente, esta ecuación demuestra que en un volumen de control dado, la masa que entra en él es igual a la que sale.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\delta}{\delta \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\delta u_\phi}{\delta \phi} = 0 \quad (\text{Ec. 3.2.1})$$

Por simetría esférica se puede afirmar que:

$$\frac{\delta}{\delta \phi} = \frac{\delta}{\delta \theta} = 0$$

Quedando así la ecuación de continuidad simplificada a:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\delta}{\delta r} (r^2 u_r) = 0$$

$$r^2 u_r = CTE = C$$

Aplicando la condición de contorno en la superficie de la burbuja, que impone que la velocidad del líquido tiene que ser igual que la velocidad de variación del radio de la burbuja, por la condición de no deslizamiento:

$$u_r|_R = \dot{R}$$

Y particularizando para el radio $r = R(t)$ se tiene:

$$R^2 \dot{R} = C$$

$$u_r = \dot{R} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (\text{Ec. 3.2.2})$$

ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La aplicación de fuerzas provoca la variación de cantidad de movimiento. Estudiamos la expresión en la dirección de la coordenada r , ya que será la que nos aporte información relevante para el estudio.

$$\rho \left(\frac{\delta u_r}{\delta t} + u_r \frac{\delta u_r}{\delta r} \right) = - \frac{\delta p}{\delta r} \quad (\text{Ec. 3.2.3})$$

Calculando término a término se obtiene por un lado que el primer sumando de la (Ec. 3.2.3) es:

$$\frac{\delta u_r}{\delta t} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\delta(\dot{R} R^2)}{\delta t} \right) = \frac{1}{r^2} [2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R}] = \frac{2}{r^2} R\dot{R}^2 + \frac{1}{r^2} R^2\ddot{R} \quad (\text{Ec. 3.2.4})$$

Por otro lado se calcula el segundo de los sumandos de la (Ec. 3.2.3), obteniéndose:

$$\begin{aligned} \frac{\delta u_r}{\delta r} &= - \frac{2}{r^3} \dot{R} R^2 \\ u_r \frac{\delta u_r}{\delta r} &= \frac{\dot{R} R^2}{r^2} \left(- \frac{2}{r^3} \right) \dot{R} R^2 = - \frac{2}{r^5} \dot{R}^2 R^4 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.2.5})$$

Y agrupando estos términos de (Ec. 3.2.4) y (Ec. 3.2.5), se puede expresar el término izquierdo de la expresión de cantidad de movimiento como:

$$\rho \left(\frac{\delta u_r}{\delta t} + u_r \frac{\delta u_r}{\delta r} \right) = \rho \left(\frac{2}{r^2} R\dot{R}^2 + \frac{1}{r^2} R^2\ddot{R} - \frac{2}{r^5} \dot{R}^2 R^4 \right) = \rho \left(\frac{2}{r^2} R\dot{R}^2 - \frac{2}{r^5} R^4\dot{R}^2 + \frac{1}{r^2} R^2\ddot{R} \right)$$

Quedando la ecuación de cantidad de movimiento finalmente expresada como:

$$\frac{2}{r^2} R\dot{R}^2 - \frac{2}{r^5} R^4\dot{R}^2 + \frac{1}{r^2} R^2\ddot{R} = - \frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta r} \quad (\text{Ec. 3.2.6})$$

con densidad ρ constante.

Integramos ahora la ecuación desde $R(t)$ hasta el infinito en la coordenada r , es decir, desde la burbuja, donde empieza la fase líquida, hasta el final de ésta:

$$2 \int_{R(t)}^{\infty} \frac{R\dot{R}^2}{r^2} dr - 2 \int_{R(t)}^{\infty} \frac{1}{r^5} R^4\dot{R}^2 dr + \int_{R(t)}^{\infty} \frac{1}{r^2} R^2\ddot{R} dr = - \frac{1}{\rho} \int_{R(t)}^{\infty} \frac{\delta P}{\delta r} dr$$

Las componentes del radio R y su derivada sólo varían con el tiempo, por lo que pueden salir de la integral:

$$2R\dot{R}^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{R(t)}^{\infty} - 2R^4 \dot{R}^2 \left[\frac{1}{4r^4} \right]_{R(t)}^{\infty} + \ddot{R}R^2 \left[-\frac{1}{r} \right]_{R(t)}^{\infty} = -\frac{1}{\rho} [P]_{R(t)}^{\infty}$$

$$2\dot{R}^2 - \frac{1}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R} = \frac{P_L - P_{\infty}}{\rho}$$

$$\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R} = \frac{P_L - P_{\infty}}{\rho} \quad (\text{Ec. 3.2.7})$$

siendo P_L la presión justo en la pared de la burbuja.

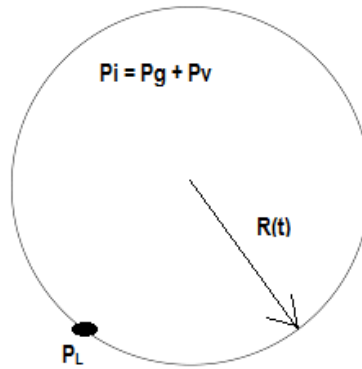


Figura 3.2.2.: Disposición de presiones en la burbuja

Por otro lado, se necesita conocer el valor de P_L para tener definida completamente la ecuación de Rayleigh-Plesset.

Mediante equilibrio de fuerzas en la pared de la burbuja se deduce que:

$$P_i = P_L + \frac{2\sigma}{R}$$

$$P_g + P_v = P_L + \frac{2\sigma}{R} \quad (\text{Ec. 3.2.8})$$

donde:

$p_i \equiv$ presión en el interior de la burbuja

$p_g \equiv$ presión del gas

$p_v \equiv$ presión del vapor

$\sigma \equiv$ tensión superficial

Suponiendo un proceso reversible y haciendo uso de la ecuación que describe un proceso adiabático en un gas:

$$PV^\gamma = CTE$$

$$P_g(t) \left(\frac{4}{3} \pi R^3(t) \right)^\gamma = P_{g0} \left(\frac{4}{3} \pi R_0^3 \right)^\gamma$$

$$P_g = P_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \quad (\text{Ec. 3.2.9})$$

Y agrupando las ecuaciones (Ec. 3.2.8) y (Ec. 3.2.9), se tiene que:

$$P_L + \frac{2\sigma}{R} = P_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + P_v \quad (\text{Ec. 3.2.10})$$

Posteriormente se vio que para cumplir la ecuación era necesario introducir a la (Ec. 3.2.10) adicionalmente un término viscoso de valor:

$$T_{viscoso} = -(4\mu\dot{R}) / R$$

Obteniendo así un valor de la presión justo en la pared de la burbuja tal que:

$$P_L = P_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + P_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R} \quad (\text{Ec. 3.2.11})$$

Por otro lado, se necesita conocer el valor de la presión del gas inicial P_{g0} . Ésta se puede deducir gracias a la relación que se obtiene sabiendo que en el instante inicial se ha de cumplir que:

$$P_{i0} = P_{g0} + P_v = P_{L0} + \frac{2\sigma}{R_0} \quad (\text{Ec. 3.2.12})$$

En un tiempo inicial, la presión de la pared de la burbuja es $P_{L0} = P_0$, por lo que:

$$P_{g0} = P_0 - P_v + \frac{2\sigma}{R_0} \quad (\text{Ec. 3.2.13})$$

Se concluye por tanto que la presión en la frontera de la burbuja viene dada por la expresión (Ec. 3.2.13) introducida en la (Ec. 3.2.11):

$$P_L = \left(P_0 - P_v + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + P_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R} \quad (\text{Ec. 3.2.14})$$

La ecuación de Rayleigh-Plesset final se expresa como:

$$\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R} = \frac{\left[\left(P_0 - P_v + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + P_v - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu\dot{R}}{R}\right] - P_\infty}{\rho} \quad (\text{Ec. 3.2.15})$$

Ahora, tras haber calculado el radio de la burbuja $R(t)$ por medio de Rayleigh-Plesset, es necesario expresar la fuente de divergencia de la velocidad, S , para conocer su valor, como función del propio radio de la burbuja $R(t)$. El volumen de la burbuja viene dado por la expresión del volumen de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Así pues, la fuente de divergencia en función del radio de la burbuja queda como:

$$S = \frac{\dot{V}}{V} = \frac{4\pi R^2(t)}{\frac{4}{3}\pi R^3(t)} = \frac{3\dot{R}}{R(t)} \quad (\text{Ec. 3.2.16})$$

Hay que resaltar que, aunque en este trabajo se estudie el comportamiento de la burbuja cuando sufre un colapso en el que abandona la simetría esférica, se puede utilizar la expresión del volumen de la esfera para imponer la variación de volumen que sufrirá la burbuja, ya que con ello sólo se está imponiendo la variación de volumen pero no se obliga a que la forma de la burbuja sea esférica.

3.3. ADIMENSIONALIZACIÓN

El solver Gerris resuelve las ecuaciones en forma adimensional. Por tanto, son necesarios unos parámetros característicos para la resolución del problema planteado. Estas variables utilizadas para la adimensionalización son:

$$\rho_c = \rho_l$$

$$R_c = 10R_{m\acute{a}x}$$

$$t_c = t_i$$

donde ρ_l es la densidad del líquido, $R_{m\acute{a}x}$ es el radio inicial de la burbuja antes del colapso, que coincide con el radio máximo, y t_i es el tiempo de implosión o colapso, que es el tiempo que requiere la burbuja para alcanzar su volumen mínimo.

Este tiempo es conocido como tiempo de Rayleigh y se obtiene como[7]:

$$t_{Rayleigh} = 0.915R_{m\acute{a}x}\sqrt{\frac{\rho_l}{\Delta P}}$$

donde $\Delta P = p_{\infty} - p_v$ es el salto de presión externa que actúa sobre la burbuja (diferencia de presión entre un punto muy alejado de la burbuja y la presión de vapor de ésta). Usando estos parámetros característicos, el salto de presión adimensional viene dado por:

$$\Delta \tilde{P} = \Delta P \frac{t_i^2}{100 R_{m\acute{a}x}^2 \rho_l}$$

Y teniendo en cuenta la definición del tiempo de implosión, se puede definir el salto de presiones adimensional como:

$$\Delta \tilde{P} = \frac{0.915^2}{100}$$

En consecuencia, se puede afirmar que la presión de vapor y la presión en el infinito son:

$$\tilde{P}_v = P_v \frac{t_i^2}{100 R_{m\acute{a}x}^2 \rho_l}$$

$$\tilde{P}_{\infty} = \tilde{P}_v + \Delta \tilde{P}$$

Además del efecto del salto de presión que actúa sobre la burbuja, también se debe considerar la influencia de la tensión superficial y la viscosidad para resolver el colapso. Por tanto se definen los números de Weber y de Reynolds de manera que:

$$We = \frac{\rho_l 1000 R_{m\acute{a}x}^3}{\sigma t_i^2}$$

$$Re = \frac{\rho_l 100 R_{m\acute{a}x}^2}{\mu t_i}$$

A partir de las magnitudes características del problema se puede explicar la adimensionalización de las variables que aparecen en él: posición, velocidad y volumen.

$$Posición: \hat{x} = \frac{x}{10 R_{m\acute{a}x}}$$

$$Velocidad: \hat{v} = \frac{v}{\frac{10 R_{m\acute{a}x}}{t_i}}$$

$$Volumen: \hat{V} = \frac{V}{1000 R_{m\acute{a}x}^3}$$

En las aplicaciones reales con la presencia de grupos de burbujas, la respuesta individual de una burbuja no sólo se ve influenciada por el campo de presión en el que se encuentra, sino también por el campo de presión inducido por las burbujas que la rodean. Este fenómeno es conocido como interacciones “burbuja-burbuja”. Teóricamente, estas interacciones burbuja-burbuja inducen a un retraso en la respuesta de la burbuja. Es decir, se espera que el tiempo de colapso de Rayleigh se vea modificado por la presencia de más burbujas en los alrededores.

3.4. FUENTE DE ASIMETRÍA

Es importante resaltar que el modelo simplificando sobre el que se está realizando el estudio tiene en cuenta el efecto de la tensión superficial y la viscosidad, pero desprecia la variación de temperatura y considera una presión uniforme en el gas. Todos los efectos físicos tenidos en cuenta que actúan sobre la burbuja lo hacen de forma simétrica, por lo que la burbuja debe colapsar y expandirse simétricamente si no existe ninguna fuente de asimetría en el dominio del flujo exterior.

Para el planteamiento del problema se aprovecha la simetría cilíndrica en la deformación y así resolverlo en coordenadas axilsimétricas en dos dimensiones. Aprovechando esta simetría basta con resolver una mitad de la burbuja ya que la otra mitad sufrirá los mismos efectos.

Como el objetivo del estudio llevado a cabo es el análisis del movimiento de traslación debido a deformaciones no esféricas de su interfase en el colapso, es necesario introducir una fuente de asimetría en el sistema. Hay varias posibilidades para romper la simetría. Una de ellas sería suponer la existencia de una pared en un lado de la burbuja, lo que implicaría una asimetría en los fenómenos físicos actuantes sobre ella, como la aparición de una fuerza en el extremo en el que está situada la pared. Esta pared sería equivalente a suponer la presencia de otra burbuja en un experimento real. Sin embargo en este caso, para conseguir las deformaciones no esféricas se introduce una fuerza de gravedad en la dirección del eje de simetría.

Se muestra a continuación dos representaciones sobre el mallado realizado por Gerris de una burbuja que se deforma sin mantener la simetría esférica pero la cual no sufre una deformación tan grande como para llegar a la formación de jet.

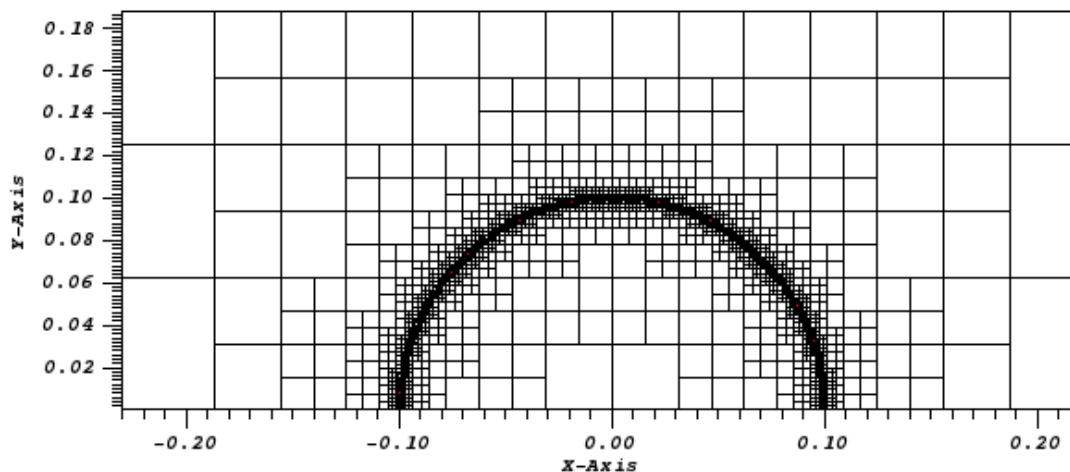


Figura 3.4.1.: Mallado de la representación de la situación inicial de la burbuja

Esta primera instantánea, “Figura 3.4.1.” hace referencia al estado inicial de la burbuja, donde se puede apreciar su esfericidad ya que aún no ha sufrido deformación ninguna. El mallado que presenta Gerris es simétrico, estando la malla más refinada en las zonas de la pared de la burbuja, regiones en las que aparecen los cambios con la llegada de la onda de presión. La malla de computación se realiza con el gradiente de la función de color.

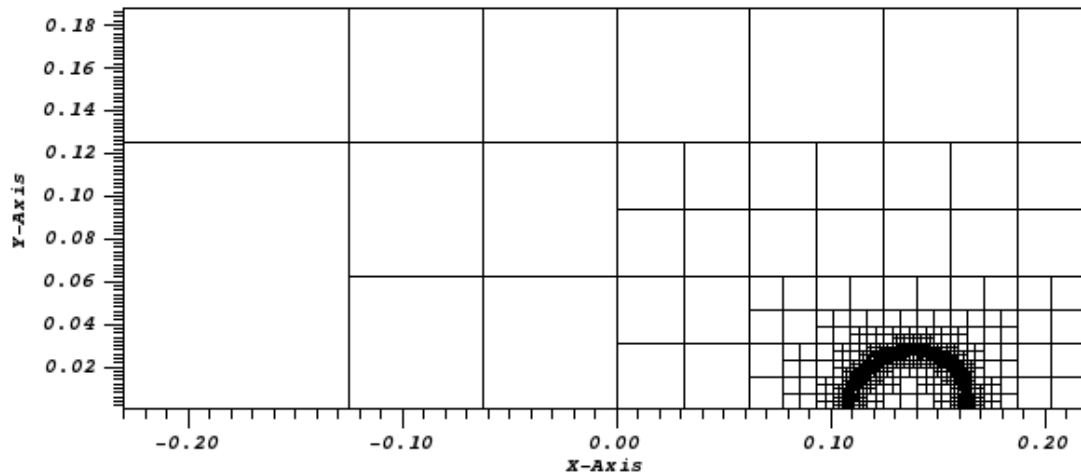


Figura 3.4.2.: Mallado de la representación tras el colapso de la burbuja

La segunda imagen, “Figura 3.4.2.”, corresponde a la situación presente tras el colapso de la burbuja. Ésta ya ha sufrido una deformación que provoca que la burbuja abandone la simetría esférica. Este hecho supone que Gerris ya no exponga un mallado simétrico, si bien sí sigue refinando más las zonas más susceptibles al cambio.

Como se ha dicho anteriormente, el estudio se limita a la resolución de media burbuja, aprovechando la simetría cilíndrica, en este caso del eje x. Se puede apreciar también que sufre un desplazamiento en la coordenada axial, ya que tras el colapso, el centro de la burbuja se encuentra más a la derecha que en el momento inicial del estudio de la burbuja.

4. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA

Se resuelve en Gerris el modelo simplificado explicado en el apartado anterior para dos casos como los vistos en los resultados experimentales expuestos:

- Un primer caso en el que la burbuja sufre una ligera deformación no simétrica y no llega a alcanzar la formación de jet.
- Un segundo caso con una mayor deformación de la interfase de la burbuja, llegando a formar jet.

De esta forma se trata de comprobar que, con el modelo simplificado del problema propuesto, se obtiene una evolución de la velocidad de la burbuja similar a la experimental, es decir, que a nivel cualitativo se es capaz de reproducir numéricamente lo que ocurre en los experimentos.

4.1. PROCESO DE RESOLUCIÓN

Para resolver el problema simplificado numéricamente, se ha utilizado un código de Gerris escrito por mi tutora como punto de partida. Este código fija un dominio de computación determinado en el que se define el volumen ocupado por la burbuja y el correspondiente al líquido, con sus propiedades físicas asociadas.

Asimismo se define una fuente de divergencia de la velocidad en la fase gaseosa en función de su volumen, como se dedujo en el apartado anterior, y una gravedad como fuente de asimetría. Se impone también el volumen de la burbuja en cada instante del colapso a partir de la ecuación de Rayleigh-Plesset.

Una vez que todo esto ha sido definido, el solver Gerris internamente integra las ecuaciones de Navier-Stokes en el líquido y en el gas bajo las condiciones impuestas. Al finalizar la resolución, Gerris proporciona una serie de ficheros de datos útiles para su posterior análisis.

Este código es particularizado para resolver el problema concreto planteado con los parámetros físicos y de simulación que se explican a continuación.

4.1.1. PARÁMETROS FÍSICOS

Gerris trabaja sin dimensiones, por lo que los parámetros físicos de partida utilizados en el código son adimensionales, y son los siguientes:

- Radio inicial de la burbuja
- Volumen inicial de la burbuja
- Posición de partida del centro de masas de la burbuja
- Parámetros particulares del gas (coeficiente de dilatación adiabática, viscosidad dinámica, presión de vapor, constante universal de los gases y masa molecular)

- Parámetros particulares del líquido (densidad y viscosidad dinámica)
- Número de Weber (parámetro adimensional asociado a la tensión superficial)
- Número de Reynolds (parámetro adimensional asociado a la viscosidad)
- Temperatura inicial (que se tomará como constante a lo largo del colapso)
- Gravedad
- Tiempo de implosión (definido con valor igual a uno)

Se indicará el valor de estos parámetros para cada una de las simulaciones mostradas.

Las simulaciones se estudian en un tiempo adimensional comprendido entre 0 y algo superiores a uno, ya que el tiempo se ha adimensionalizado con el tiempo de implosión. Desde el momento inicial hasta un tiempo igual a la unidad, la burbuja sufre el proceso de colapso, alcanzando el volumen mínimo en $t = 1$. Las simulaciones se continúan hasta unos instantes después para ver la respuesta inmediata tras el colapso.

4.1.2. PARÁMETROS DE SIMULACIÓN

Los parámetros de simulación del código son:

- Dominio de computación
- Tipo de mallado
- Nivel de refinado
- Paso temporal de integración máximo y mínimo

DOMINIO DE COMPUTACIÓN

Llegados a este punto conviene explicar el dominio de computación en el que se resuelve la burbuja. Gerris utiliza un modelo por cajas, en el que cada una de ellas refleja un espacio determinado de estudio. Para su resolución se utiliza un modelo compuesto por dos cajas, una encima de la otra, con el fin de hacer más grande el dominio y que de esta forma no tenga influencia en los resultados que se obtienen. Para cada caja es necesario definir sus condiciones de contorno, de las que dependerá el tipo de flujo que se establezca en nuestro dominio. Así pues, se les aplica a ambas la condición de flujo libre tanto en su lado derecho como en su lado izquierdo, ya que se asume que el líquido está en reposo salvo por la presencia de la burbuja. A la caja de arriba se le aplica en su borde superior también esta misma condición de flujo libre. Sin embargo, al lado inferior de la caja de abajo se le fija la condición de contorno de simetría por tratarse del lado que se utiliza como eje de simetría axial de la burbuja y permite el estudio de tan sólo una mitad de ella. Se muestra a continuación una imagen en la que se ven las dimensiones reales de la burbuja en comparación con las de las dos cajas que componen el dominio de computación.

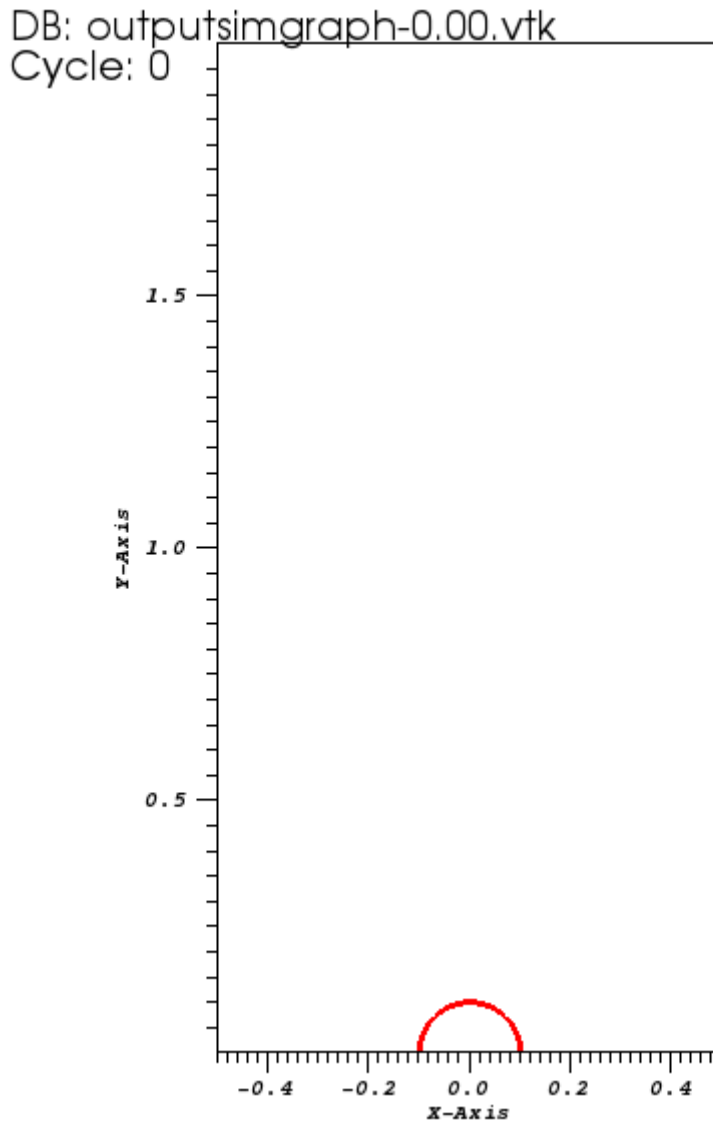


Figura 4.1.2.1.: Dominio de computación formado por dos cajas obtenido a partir del software de computación Visit.

En esta “Figura 4.1.2.1.” se pueden ver diferenciadas las dos cajas de las que se compone el dominio. La primera de ellas es la inferior, que abarca hasta el valor 1 del eje de ordenadas, y la caja número dos está conectada a la primera por el lado de arriba de esta última. Las cajas son cuadradas y tienen un lado de longitud adimensional igual a la unidad. Se aprecia como la dimensión de la burbuja es muy pequeña en comparación con el dominio de computación. Además la burbuja se encuentra centrada en el lado inferior de la primera caja para aprovechar este lado como eje de simetría, con su centro de masas en el origen del eje de abscisas.

MALLADO

Como se ha explicado anteriormente en el apartado de la fuente de asimetría, el mallado utilizado para la resolución del caso no es simétrico. Así pues, la malla de computación se calcula mediante el gradiente de la función de color y de este modo, donde la función de color cambia, que es en la interfase de la burbuja, será la zona donde el mallado sea más minucioso.

NIVEL DE REFINADO

El nivel de refinado es el encargado de definir la precisión del mallado en el estudio. Para ello se define un nivel de refinado inicial, que va incrementándose para mallar con más exactitud en tiempos cercanos al colapso. Además, se define la función “maxlevel”, encargada de hacer variar el nivel máximo de refinado a lo largo de la simulación, como:

- Nivel de refinado inicial definido como: $LEVEL$
- Función de refinado: $maxlevel = LEVEL - \frac{\log\left(\frac{Volumen}{V_0}\right)}{C_1 \log(C_2)}$
donde C_1 y C_2 son dos constantes arbitrarias.

PASO TEMPORAL DE INTEGRACIÓN

Por otro lado, el paso temporal de integración máximo y mínimo de la simulación sirve para determinar el intervalo de tiempo que usa Gerris para la integración temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes:

- Paso temporal mínimo definido como: dt_{min}
- Paso temporal máximo definido como: $dt_{máx}$

4.1.3. CONVERGENCIA DE LA SIMULACIÓN

El valor de estos parámetros de simulación descritos en el apartado anterior no se puede establecer de partida sin más. Se ha de comprobar que la simulación haya convergido tanto en tiempo como en espacio para dar la simulación como terminada. Se siguen diferentes procesos para buscar dicha convergencia.

RESOLUCIÓN EN TIEMPO

Para hacer converger la simulación en tiempo el estudio se centra en realizar simulaciones en las que los parámetros que se varíen sean los pasos temporales, tanto máximo como mínimo, y así intentar controlar el paso en el que trabaja la simulación. Si se quiere conseguir reducirlo, se debe disminuir o bien el paso temporal máximo, el mínimo, o bien ambos, ya que así el intervalo permitido de integración de las ecuaciones será más estrecho. Una buena opción, y es la escogida en la búsqueda de la convergencia temporal en este estudio, es dejar fijo el paso mínimo reduciendo el máximo. La simulación será una simulación convergida cuando, para dos de ellas en las que tan sólo varíe el paso temporal, se obtengan los mismos resultados.

Es importante asegurarse que las simulaciones estudiadas tienen unos valores que difieren suficientemente como para poder apreciar cambios entre los resultados obtenidos. Al finalizar, se escogerá, de entre las dos simulaciones de las que se han obtenido las mismas soluciones, aquella que tenga los pasos temporales mayores, ya que se tratará de una resolución que requiera menor trabajo y será más rápida para el programa.

RESOLUCIÓN EN ESPACIO

Además de conseguir una convergencia temporal en el problema, es necesario hacerlo converger también en espacio. Para ello, se le impone a Gerris un nivel de refinado máximo que indica la precisión con la que queremos que el programa resuelva la burbuja. Es importante trabajar con niveles de refinado apropiados, ya que si se trabaja con niveles muy altos, las simulaciones pueden alargarse demasiado en el tiempo al requerir mayor potencial informático, y, si se fijan niveles de refinado muy bajos, los datos obtenidos pueden ser imprecisos y no reflejar los efectos que realmente acontecen.

La burbuja experimenta una deformación progresiva por culpa de la aceleración en forma de gravedad a la que es sometida en su coordenada axial. Es por ello por lo que los instantes más relevantes se presentan al final de la simulación, en tiempos próximos al tiempo de colapso en los que la deformación es más acentuada. Con el fin de conseguir unos valores más precisos en estos instantes, se somete al programa a seguir una función por medio de la cual el nivel de refinado se incrementa a medida que corra la simulación, consiguiendo así una alta precisión en los momentos en los que hay más cambios. Esta es la llamada función “maxlevel”, definida anteriormente. Así se consigue además que la simulación no se demore demasiado en el tiempo, porque para los instantes iniciales Gerris utiliza un nivel de refinado más bajo capaz de poder resolver con mayor rapidez.

Al igual que en el caso de la resolución en el tiempo, se deben realizar simulaciones en las que nos aseguremos estar resolviendo el problema con niveles de refinado diferentes. De la misma manera, cuando se alcanza la convergencia, se realiza el estudio sobre el caso en el que, tras haberse obtenido los mismos resultados, tiene un nivel de refinado menor, por los mismos motivos que en el caso anterior.

4.2. CASO DE UNA BURBUJA CON DEFORMACIÓN NO SIMÉTRICA SIN FORMACIÓN DE JET

En este apartado se exponen los resultados obtenidos para un caso en el que la burbuja muestre una ligera deformación no esférica sin llegar a formar jet o chorro.

Los parámetros físicos característicos del caso son los siguientes:

- Número de Weber: $We = 12500$
- Número de Reynolds para el líquido: $Re = 35714.29$
- Gravedad adimensional: $gravity = 0.25$
- Radio inicial de la burbuja adimensional: $R_0 = 0.1$
- Variación de presiones adimensional: Como se ha explicado en el apartado anterior de la formulación del problema, el salto de presiones toma un valor fijo.

$$\Delta\tilde{P} = \frac{0.915^2}{100}$$

Este valor viene dado por la definición del tiempo de implosión.

- Tiempo de implosión o colapso adimensional: $t_i = 1$

Cabe destacar los altos valores del número de Weber y de Reynolds en este caso. El primero de ellos es consecuencia de la baja tensión superficial que presenta la burbuja, lo que es lógico teniendo en cuenta que sufre una deformación no esférica de su interfase. Para el caso del Reynolds es fruto de la baja viscosidad del líquido en el problema. Podría incluso despreciarse la viscosidad a la hora de resolver el problema, aunque, en los casos llevados a cabo sí se ha tenido en cuenta.

Para la resolución de este caso particular se define inicialmente el nivel de refinado inicial y la función “maxlevel” de manera que:

- Nivel de refinado inicial para el caso: $LEVEL = 10$
- Función de refinado particular para el caso: $maxlevel = LEVEL - \frac{\log\left(\frac{Volumen}{V_0}\right)}{1.5 \log(1.5)}$

El máximo nivel de refinado, que se alcanza en tiempos próximos al colapso, concretamente en tiempo $t = 1.06$, es de: $LEVEL = 16.49$

Por otro lado, el paso temporal de integración de la simulación utilizado es:

- Paso temporal mínimo: $dt_{min} = 10^{-6}$
- Paso temporal máximo: $dt_{max} = 10^{-4}$

Se muestran a continuación varias instantáneas significativas representativas del movimiento de la burbuja que presentan la evolución de su interfase hasta el colapso. Estas son tomadas en tiempos $\tau = 0$, $\tau = 0.5$, $\tau = 0.7$, $\tau = 0.8$, $\tau = 0.9$, $\tau = 1$ y $\tau = 1.05$.

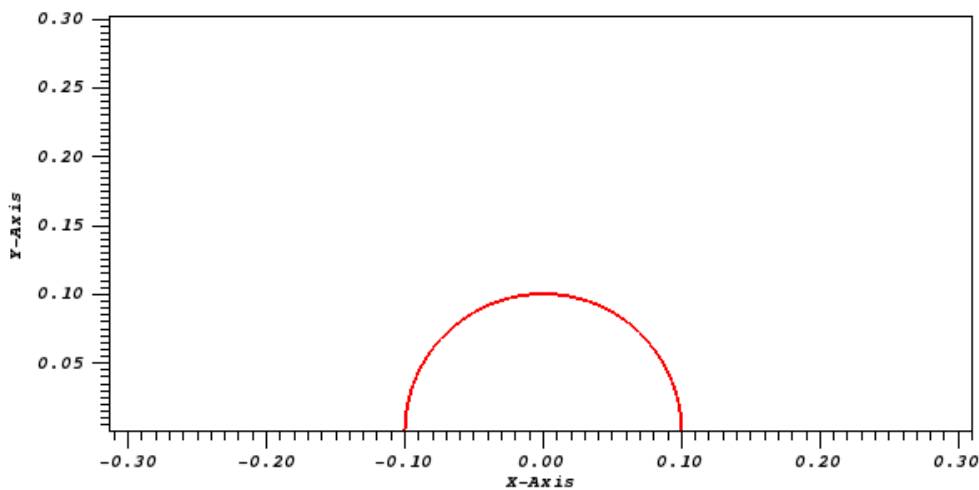


Figura 4.2.1.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0$

En el instante inicial, la burbuja se encuentra en la posición de partida. Se puede apreciar en la “Figura 4.2.1.” cómo la burbuja es completamente esférica y su centro coincide con el cero del eje de abscisas, eje representativo del movimiento de traslación, ya que la gravedad impuesta es aplicada en esta dirección.

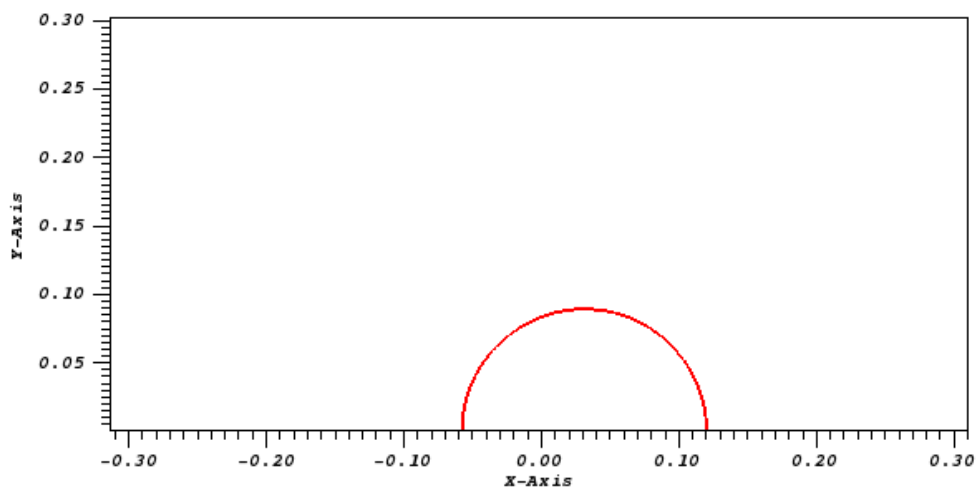


Figura 4.2.2.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0,5$

Tras los primeros instantes, se hace notar en la “Figura 4.2.2.” una pequeña traslación de la burbuja en la dirección axial. Sin embargo, apenas se aprecian cambios en la forma de la burbuja, manteniendo prácticamente hasta el momento la simetría esférica.

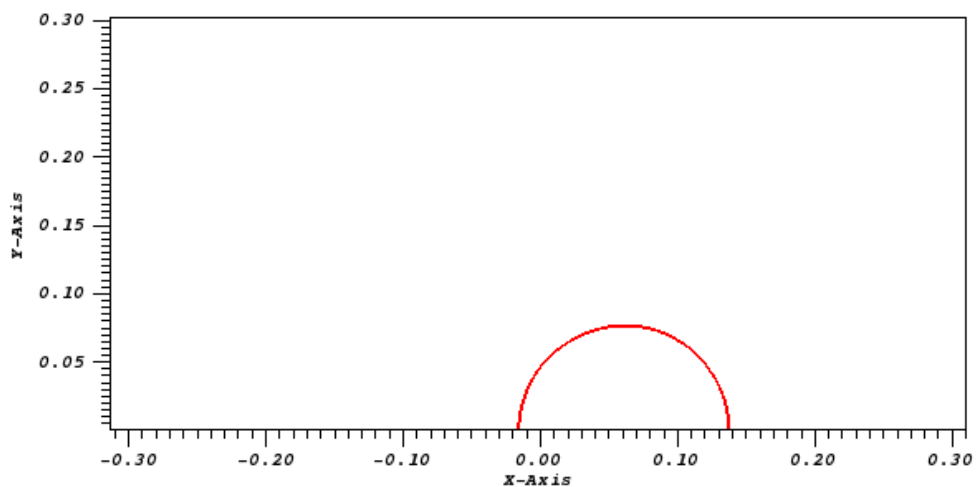


Figura 4.2.3.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0,7$

Para un tiempo adimensional de valor 0,7 como el representado en la “Figura 4.2.3.”, la burbuja sigue manteniendo una simetría esférica aproximada y siguen sin apreciarse cambios muy llamativos hasta el momento.

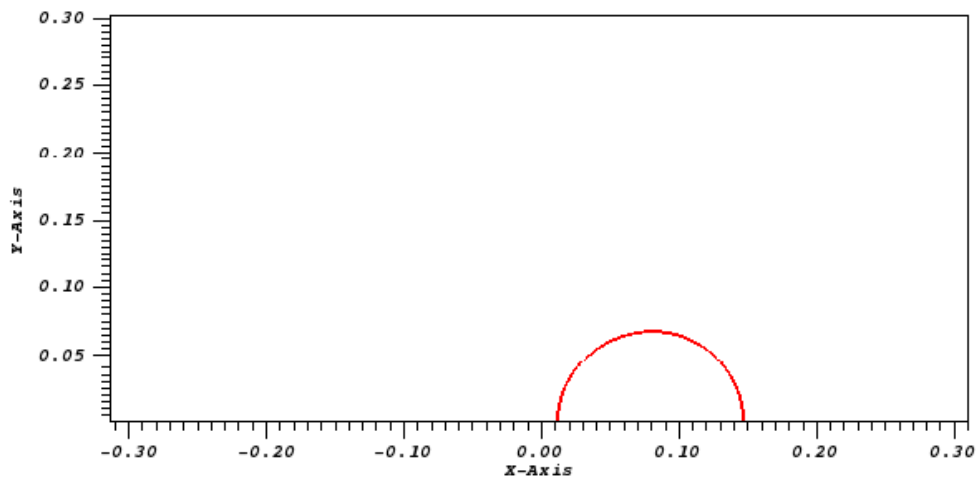


Figura 4.2.4.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0,8$

El volumen de la burbuja va haciéndose menor, fruto de la compresión provocada por la llegada del tren de ondas. Además puede observarse en la “Figura 4.2.4.” cómo el desplazamiento en el eje de abscisas se hace más significativo.

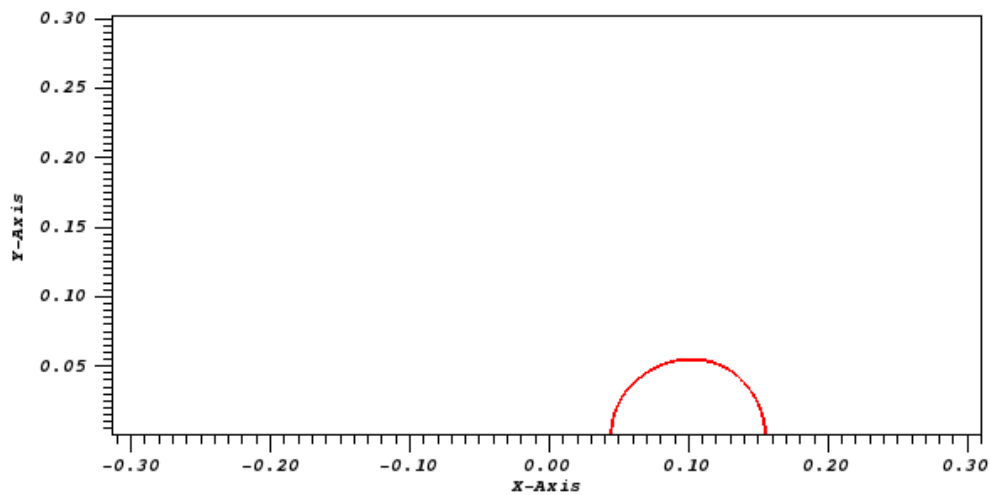


Figura 4.2.5.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 0,9$

Para un tiempo adimensional igual a 0,9 representado en la “Figura 4.2.5.”, la burbuja se encuentra cercana al colapso, y se contempla cómo el tamaño de la burbuja sigue reduciéndose al tiempo que su desplazamiento horizontal se incrementa.

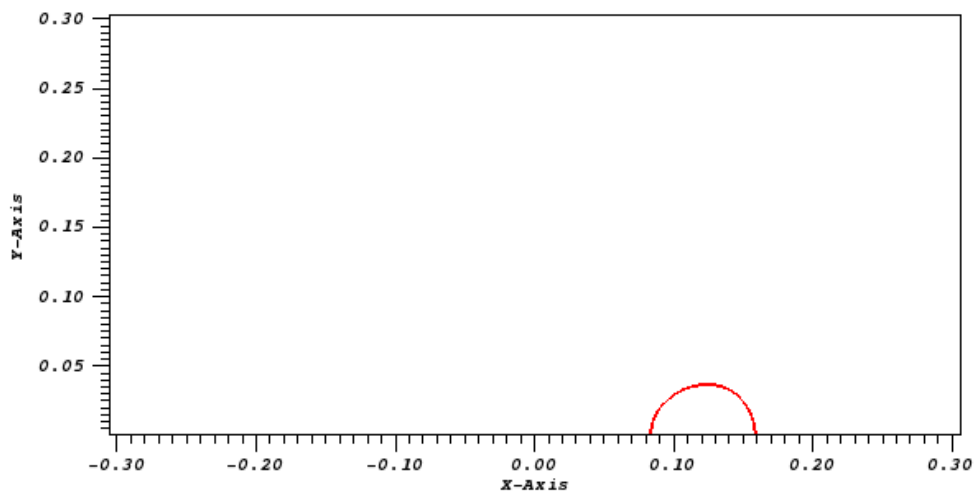


Figura 4.2.6.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 1$

Hasta este punto es lo que se denomina tiempo de implosión o colapso de la burbuja. Sí se puede apreciar llegados a este momento, “Figura 4.2.6.”, que la burbuja comienza a perder más claramente la esfericidad y que la compresión de la burbuja es más llamativa.

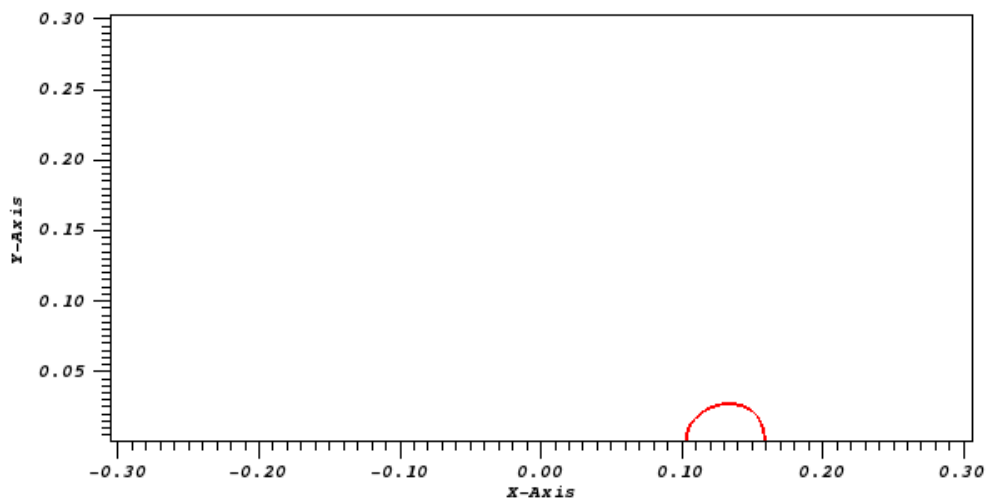


Figura 4.2.7.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet para $t = 1,05$

La burbuja alcanza su volumen mínimo algo más tarde del tiempo adimensional uno, a diferencia de lo que se presuponía previamente al estudio de la simulación. Se puede apreciar en este caso, en la “Figura 4.2.7.”, cómo la burbuja ha perdido la simetría esférica pero no ha llegado a formar un chorro y cómo se ha desplazado, siendo la traslación neta sufrida significativa en comparación con el radio de la propia burbuja.

Para poder representar el dominio de computación y la interfase de la burbuja se ha utilizado el programa informático Visit. Este programa permite al usuario visualizar y analizar los archivos de datos con el formato de Gerris. Posibilita así realizar animaciones en estas visualizaciones a lo largo del tiempo y manipularlas con operadores y expresiones matemáticas además de guardar las imágenes resultantes. Las visualizaciones se pueden obtener tanto en 2D como en 3D, aunque en este trabajo se muestran todos los resultados en dos dimensiones, y es capaz de mostrar el mallado seguido en la resolución del caso. Así pues, Visit permite, a partir de los archivos generados por el solver Gerris, simular y visualizar los efectos producidos sobre la burbuja a lo largo del tiempo y poder obtener reproducciones gráficas de la burbuja en el instante concreto en el que se desee, como es el caso de las expuestas anteriormente.

A continuación se muestra representada la velocidad de la burbuja en la coordenada axial en la “Figura 4.2.8.”. Durante la compresión de la burbuja, ésta experimenta un incremento de la velocidad a una tasa constante hasta alcanzar el máximo momentos antes de llegar al volumen mínimo.

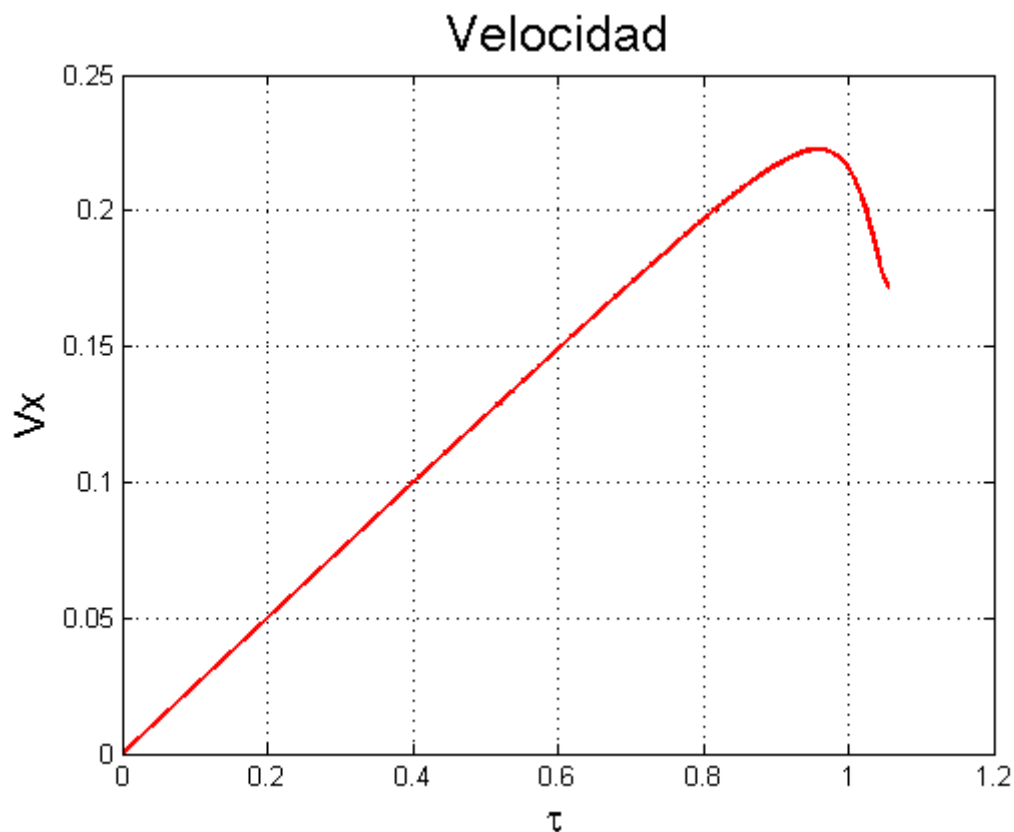


Figura 4.2.8.: Gráfica de la velocidad de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet con respecto al tiempo adimensional de colapso

Se expone también una gráfica representativa del volumen instantáneo en cada punto de la simulación en la “Figura 4.2.9.”. Se muestra cómo el volumen máximo de la burbuja coincide con el momento inicial, en el que obviamente, el radio de ésta es máximo también. El volumen mínimo, como se ha comentado a raíz de las imágenes obtenidas a partir de Visit, coincide con el momento en el que colapsa la burbuja, en $\tau = 1.05$. Sin embargo este volumen mínimo no es puntual, sino que se mantiene durante unos cortos instantes de tiempo. Se puede notar también que, hasta $\tau = 0.4$ la variación de volumen se acelera, mientras que a partir de este punto el volumen varía de manera constante.

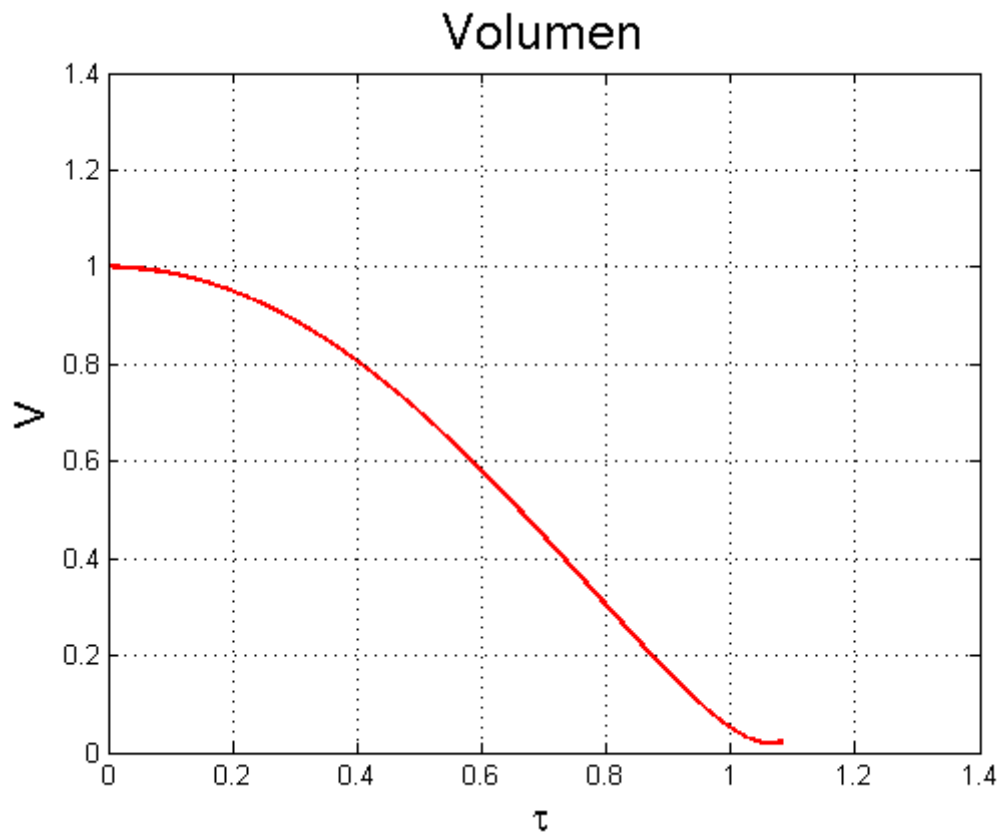


Figura 4.2.9.: Gráfica del volumen de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y sin formación de jet con respecto al tiempo adimensional de colapso

Es necesario recalcar el hecho de que los resultados numéricos obtenidos indiquen que el volumen mínimo se alcanza unos instantes después del tiempo adimensional unidad. Esto se debe a que el tiempo de implosión impuesto es un valor teórico[7], pero los resultados obtenidos indican que realmente el tiempo de colapso de la burbuja para estas condiciones es un poco superior al impuesto de partida.

4.3. CASO DE UNA BURBUJA CON DEFORMACIÓN NO SIMÉTRICA CON FORMACIÓN DE JET

Se procede en este caso al estudio de los resultados de un caso en el que la burbuja se deforma perdiendo la simetría esférica y llegando a formar jet.

Los parámetros físicos propios del caso son exactamente iguales a excepción de la gravedad impuesta y la tensión superficial, y en consecuencia el número de Weber:

- Número de Weber: $We = 16666.67$
- Número de Reynolds para el líquido: $Re = 35714.29$
- Gravedad adimensional: $gravity = 0.35$
- Radio inicial de la burbuja adimensional: $R_0 = 0.1$
- Variación de presiones adimensional: $\Delta\tilde{P} = \frac{0.915^2}{100}$
- Tiempo de implosión o colapso adimensional: $t_i = 1$

El refinado inicial y la función “maxlevel” utilizadas para este caso son iguales que para el caso en el que no se forma jet. Así pues:

- Nivel de refinado inicial para el caso: $LEVEL = 10$
- Función de refinado particular para el caso: $maxlevel = LEVEL - \frac{\log\left(\frac{Volumen}{V_0}\right)}{1.5 \log(1.5)}$

El máximo nivel de refinado tampoco varía con respecto al del caso anterior, ya que la función “maxlevel” tan solo depende del nivel de refinado fijado inicialmente, que es el mismo, y del volumen de la burbuja, que como se verá posteriormente, tampoco cambia. Además, las constantes utilizadas en esta función son las mismas. Así pues, para un $t = 1.06$ se alcanza un valor máximo del nivel de refinado de: $LEVEL = 16.49$.

El paso temporal de integración de la simulación también se mantiene el mismo:

- Paso temporal mínimo: $dt_{min} = 10^{-6}$
- Paso temporal máximo: $dt_{max} = 10^{-4}$

De la misma manera, se muestran varias imágenes, en los mismos tiempos que en el caso anterior, en las que se observa el comportamiento de la burbuja a lo largo de la etapa de colapso.

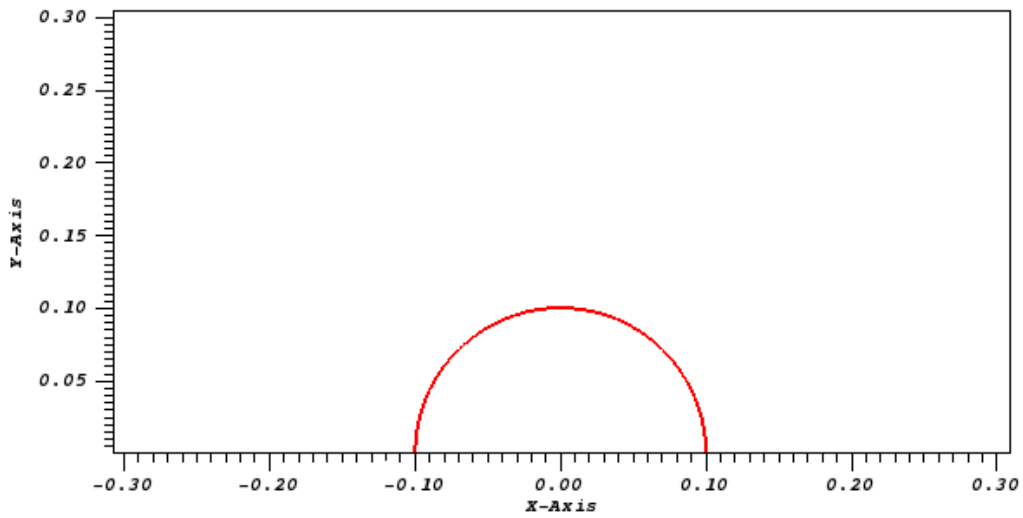


Figura 4.3.1.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0$

Se supone una burbuja exactamente igual en composición y tamaño que en el caso anterior salvo la diferencia en la tensión superficial anteriormente comentada. En consecuencia, la posición y apariencia de partida en la “Figura 4.3.1.” es exactamente la misma que para el caso en el que no se alcanza la formación de jet. Cabe recordar que la burbuja se sitúa en el centro de los ejes de coordenadas.

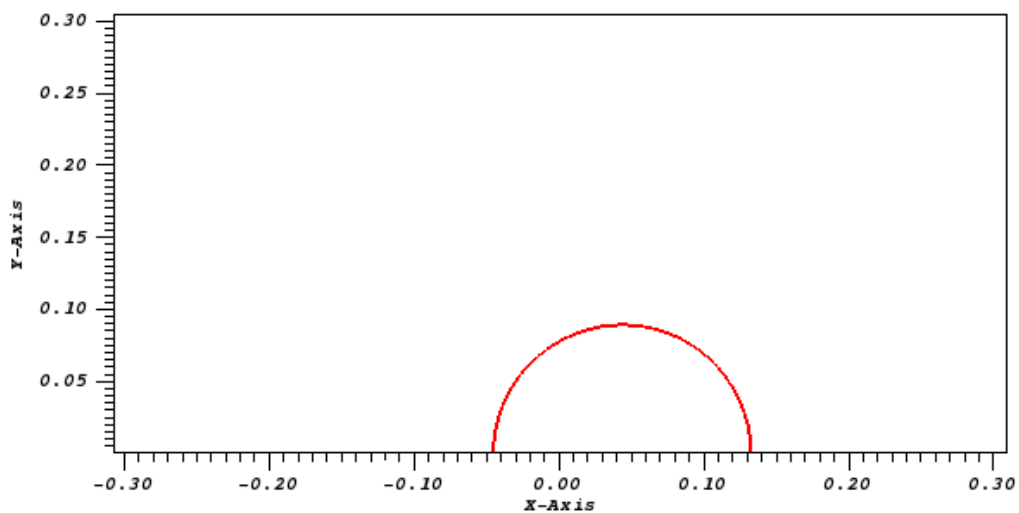


Figura 4.3.2.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0,5$

En la “Figura 4.3.2.” se puede observar como desde el primer momento hay cambios con respecto al caso anterior, fruto de la mayor gravedad impuesta y del cambio en la tensión superficial. Aunque es cierto que en estos instantes de tiempo, las variantes no son demasiado acusadas aún.

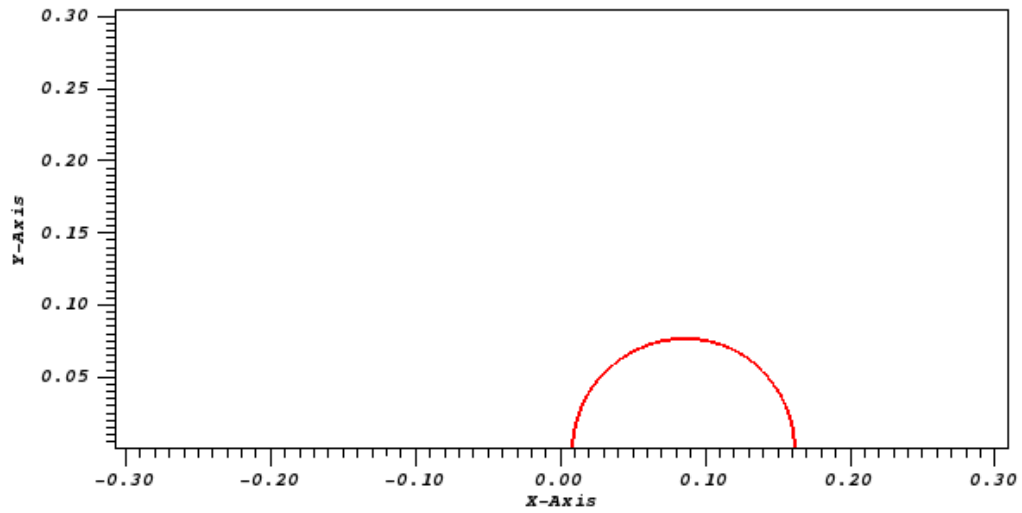


Figura 4.3.3.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0,7$

La burbuja mantiene todavía su esfericidad inicial, pero los desplazamientos y la compresión comienzan a verse con mayor claridad en esta “Figura 4.3.3.”

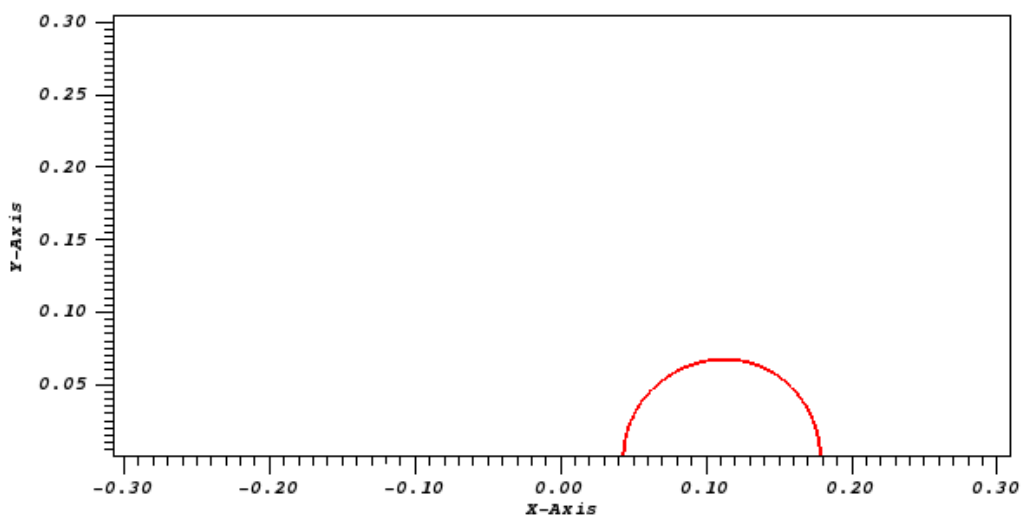


Figura 4.3.4.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0,8$

Como se ha comentado en el caso anterior, en la “Figura 4.3.4.”, el desplazamiento en la dirección de la gravedad impuesta se va acentuando poco a poco a la par que el volumen de la burbuja se reduce por la llegada de la onda.

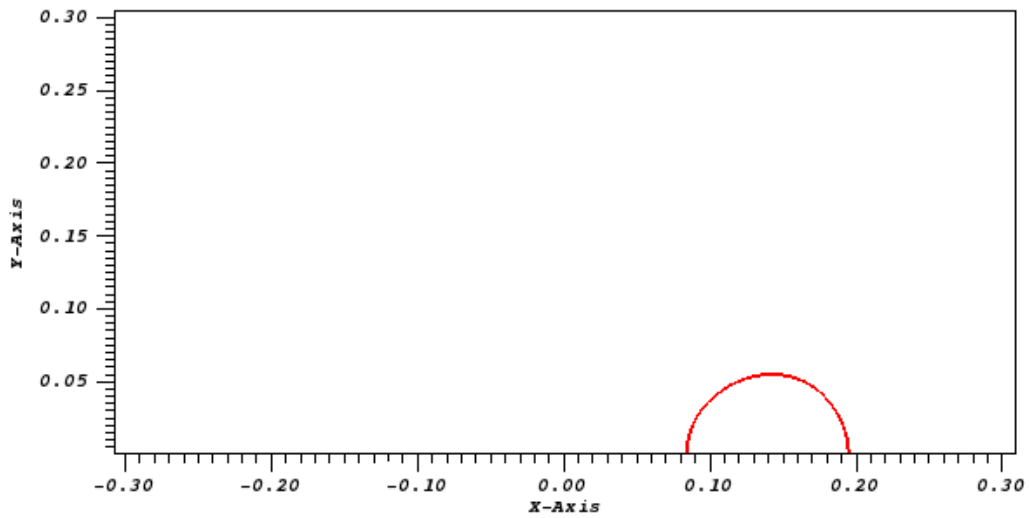


Figura 4.3.5.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 0,9$

Llegados a este punto la burbuja se encuentra cercana al colapso. Se observa a partir de la “Figura 4.3.5.” que continúa la intensificación de la compresión y del desplazamiento horizontal.

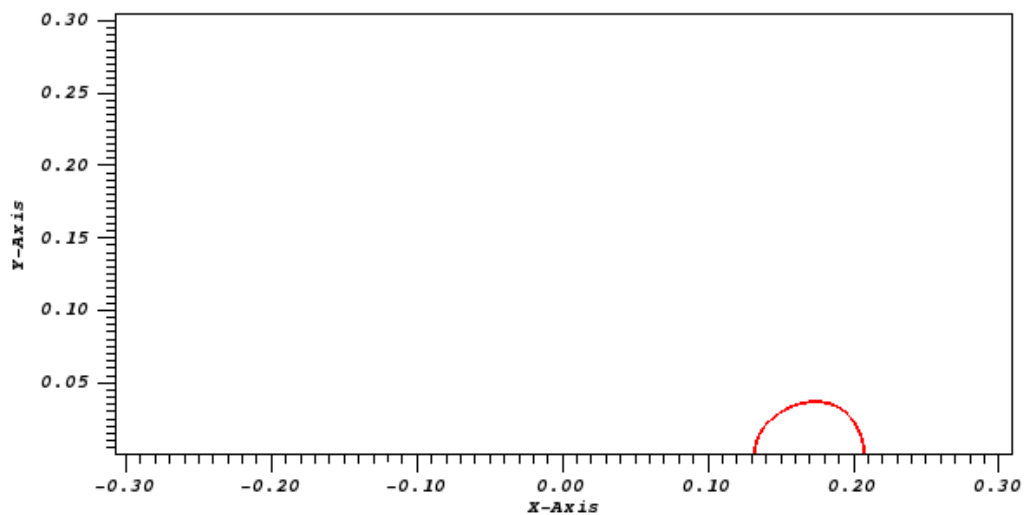


Figura 4.3.6.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 1$

Alcanza en la “Figura 4.3.6.” el tiempo de implosión, igual a la unidad. El desplazamiento sufrido por la burbuja ya es bastante mayor que su propio radio inicial. Además, la burbuja deja de presentar una forma esférica más notoriamente y su volumen se hace también más pequeño.

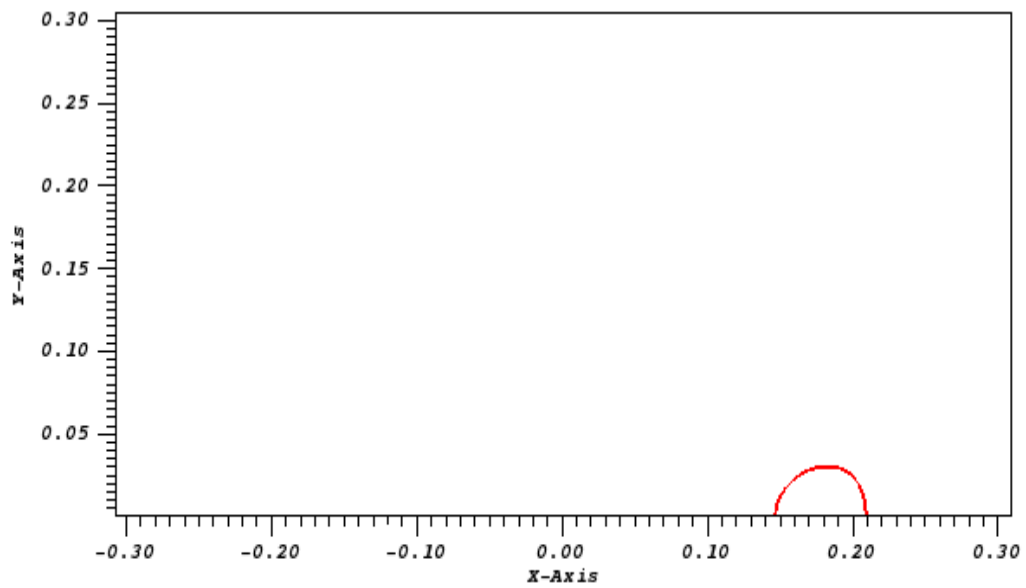


Figura 4.3.7.: Instantánea de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet para $t = 1,05$

Instantes después del tiempo de colapso, representado por la “Figura 4.3.7.”, la burbuja alcanza su volumen mínimo. Se puede observar también cómo ha perdido por completo la simetría esférica, formando incluso un inicio de chorro. Este chorro no puede verse más desarrollado, y tan solo el comienzo de su formación, porque se necesitaría ver unos instantes posteriores a los estudiados. Además, llegados a este punto, puede apreciarse el gran desplazamiento experimentado por la burbuja.

De la misma manera que para el caso en el que la burbuja no alcanza la formación de jet, se representa la velocidad de ésta en la coordenada axial en función del tiempo en la “Figura 4.3.8”. El momento de máxima velocidad se alcanza también instantes antes de llegar a la compresión máxima.

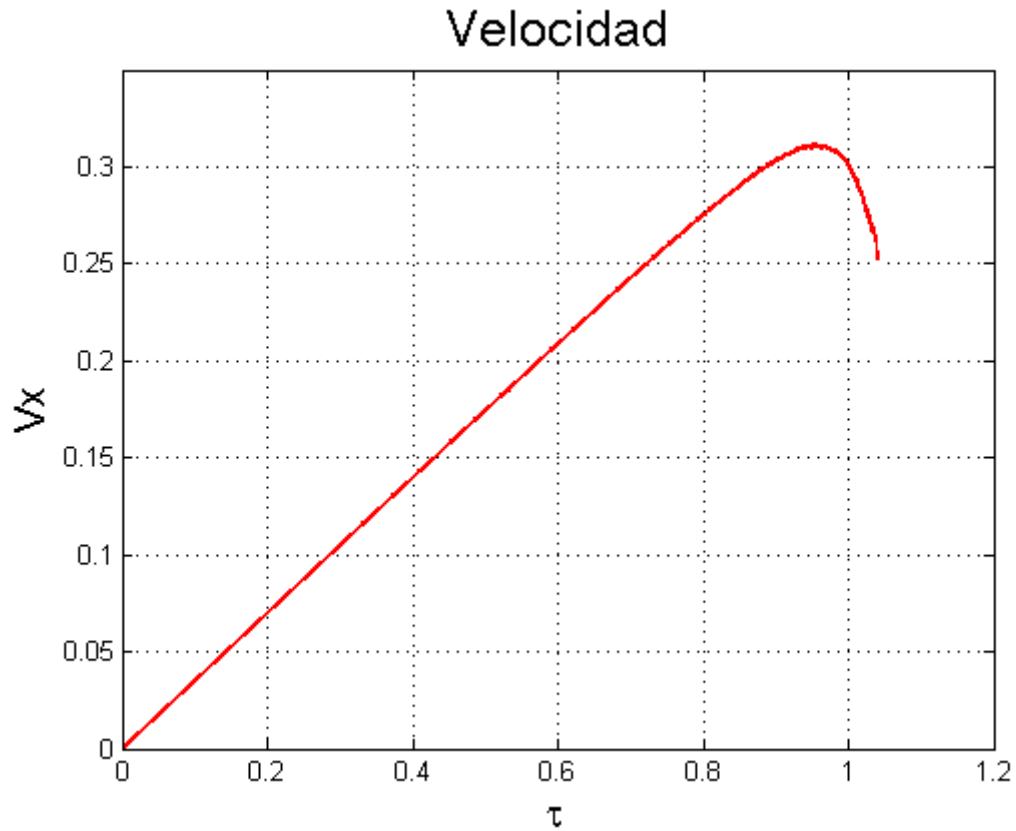


Figura 4.3.8.: Gráfica de la velocidad de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet con respecto al tiempo adimensional de colapso

Se representa también en la “Figura4.3.9.” el volumen de la burbuja a lo largo de la etapa de colapso. Se trata de una variación de volumen idéntica a la burbuja sin jet, ya que varía la forma de la burbuja pero no el volumen contenido en ella. Como se ha explicado en el caso anterior el volumen máximo es el volumen inicial y a partir de ese momento la burbuja sufre una compresión progresiva. Esta compresión concluye en torno a $\tau = 1.05$, momento en el cual la burbuja tiene el mínimo volumen. Como se comentó anteriormente, este volumen no es puntual y se prolonga durante unos instantes. Cabe destacar también en esta ocasión que el volumen mínimo no se alcanza en un tiempo adimensional igual a la unidad debido a que este valor es un valor teórico impuesto inicialmente en la simulación, pero que tras los resultados se demuestra que se alcanza en tiempos algo superiores.

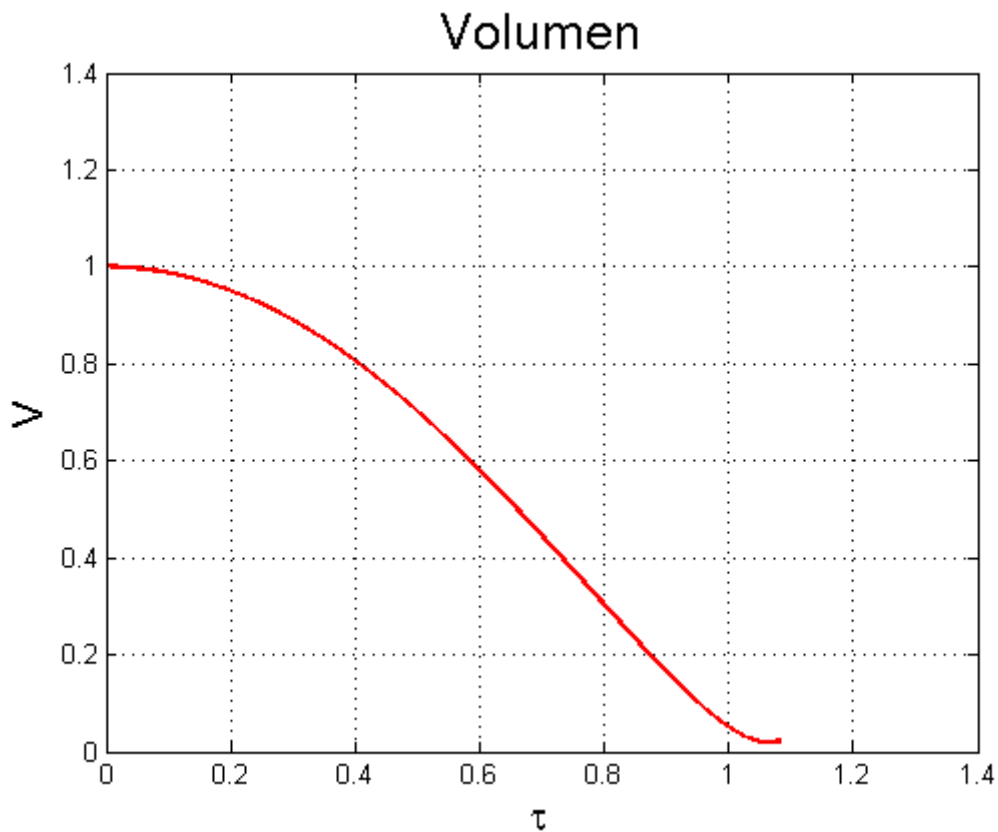


Figura 4.3.9.: Gráfica del volumen de una burbuja con una ligera deformación sin mantener la simetría esférica y con formación de jet con respecto al tiempo adimensional de colapso

Se realiza a continuación una comparación de la velocidad entre los dos casos: deformación no esférica de la interfase con y sin formación de jet. Comparar los volúmenes carece de sentido porque ya se ha explicado que experimenta la misma curva para los dos casos.

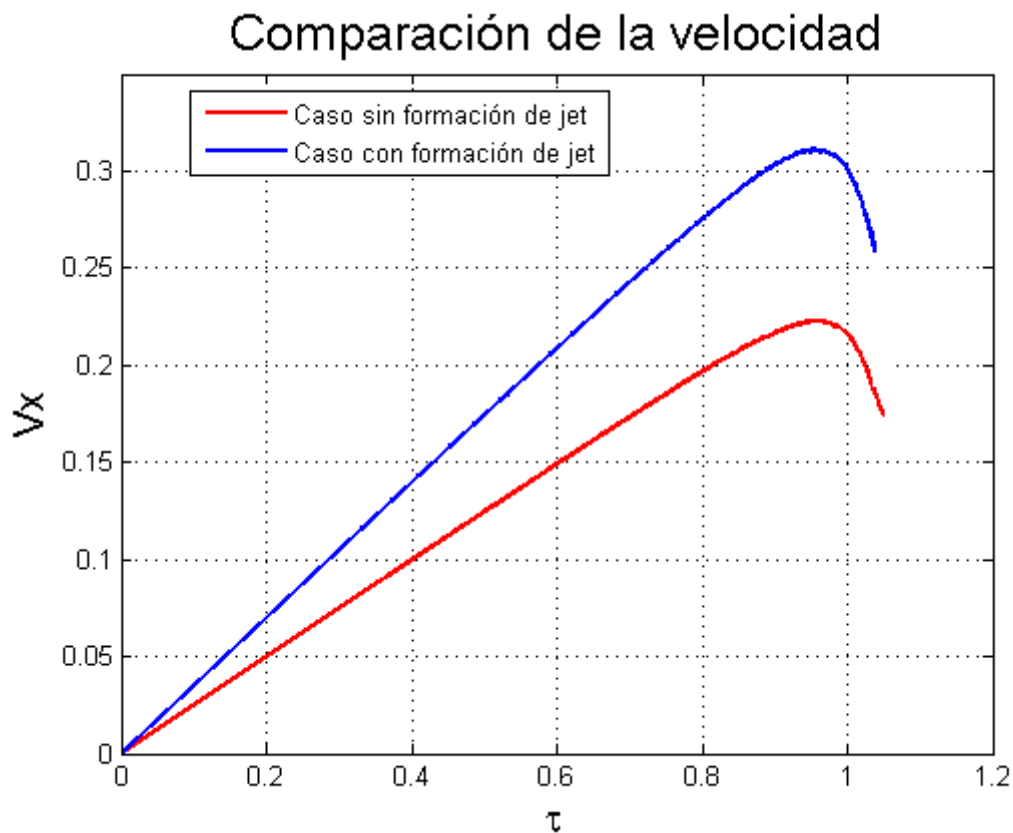


Figura 4.3.10.: Comparación de la velocidad entre una burbuja que no mantiene la simetría esférica tras el colapso y no llega a formar jet y otra que sí alcanza la formación de jet

La “Figura 4.3.10.” demuestra que las velocidades que se alcanzan en el caso de la burbuja que llega a la formación de jet son mayores que cuando no se llega a formar el chorro. Esto está provocado por la mayor fuerza de gravedad impuesta en el caso de la aparición de jet, que implica que los efectos sean más acentuados, entre ellos la magnitud de la velocidad experimentada por la burbuja. También puede concluirse que alcanza el máximo en ambos casos algo antes del tiempo adimensional unidad y que, aunque sí cambie cuantitativamente, los dos casos rigen un comportamiento similar en cuanto a la forma en la que varía la velocidad.

5.- ANÁLISIS ECONÓMICO DEL PROYECTO

Aunque este proyecto se trata más de un trabajo de investigación que de un proyecto ingenieril con aplicación directa, su realización no está exenta de un coste. En este apartado, se realiza un análisis de los costes asociados a las herramientas utilizadas. Entre ellas se pueden destacar:

- Software informático de Matlab.
- Software informático de Gerris.
- Utilización de un equipo informático que permita realizar los cálculos que se requieren para la resolución del problema.
- Ingeniero que realice el estudio del problema y las simulaciones.

A continuación se estudia el coste asociado a estos factores necesarios para la realización del proyecto y se estima un presupuesto para iniciarlo.

SOFTWARE INFORMÁTICO

En este apartado se realiza el análisis del coste asociado al software informático empleado para la realización del problema. En principio, el software empleado consta de los programas: Matlab y Gerris. Se obvia cualquier coste asociado al sistema operativo así como de las diferentes versiones de la licencia de ambos programas. El solver Gerris tiene una versión académica con la que se podrían realizar los cálculos requeridos en este trabajo. Sin embargo, la licencia de Matlab, considerando la versión más moderna, es de 2000 €.

Considerado un periodo de trabajo cercano a los seis meses, la licencia de Matlab no ha de ser renovada durante la realización del proyecto. Por ello, no incurre un coste adicional al proyecto.

HARDWARE INFORMÁTICO

A continuación se analiza el coste asociado al hardware necesario para realizar todos los cálculos necesarios sobre el estudio de la evolución de la burbuja. Al tratarse de un problema complejo, la necesidad de ahorrar tiempo en los cálculos realizados, así como la necesidad de realizar un amplio rango de operaciones (integraciones, derivaciones, etc.), necesita de la utilización de un equipo de trabajo sofisticado. En este caso, se necesita un ordenador cuya capacidad de cálculo sea alta. El coste asociado es el siguiente:

Producto	Precio (€)
PC de sobremesa HP I7	879
Monitor Asus 16:9	258
Total = 1137 €	

COSTE PERSONAL

Para el cálculo del coste de personal se tienen en cuenta las personas que han participado en el proyecto. El coste asociado a cada persona partícipe del proyecto ha sido estimado según el coste del precio/hora de cada profesión. Concretamente, en la realización del proyecto ha participado un becario, encargado de la resolución numérica del proyecto, así como una profesora tutora que ha resuelto las dudas y problemas que el alumno ha encontrado en la realización del proyecto. La siguiente tabla recoge el coste asociado a los costes humanos necesarios para la correcta ejecución del proyecto:

Personal	€/hora	Horas dedicadas	Coste personal (€)
Alumno	12	300	3600
Tutor	20	25	500
Total = 4100 €			

COSTE TOTAL DEL PROYECTO

Se muestra en este caso el coste asociado a la realización de la totalidad del proyecto, teniendo en cuenta todos los aspectos anteriormente descritos. Este coste será la suma de todos los anteriores:

Descripción	Coste (€)
Software informático	2000
Hardware informático	1137
Personal	4100
Total = 7237 €	

Así pues, el presupuesto inicial necesario para la ejecución del proyecto asciende a 7237€.

6.- CONCLUSIONES

Durante la realización del estudio llevado a cabo sobre la traslación de burbujas debida a deformaciones no esféricas de su entrefase, se han tenido en cuenta una serie de consideraciones con respecto al comportamiento de las burbujas con el fin de que el problema se resolviera de una manera más sencilla. Sin embargo, un modelo de resolución más exacto convendría que contemplara algunas observaciones, como por ejemplo las diferentes irregularidades que aparecen en las burbujas destinadas a cada aplicación, principalmente médicas. En este caso, por ejemplo, aparece una capa de lípidos sobre la superficie de la burbuja que hace variar sus propiedades. Además, el estudio de una burbuja en particular no es demasiado estricto, ya que la presencia de más de ellas en los alrededores afecta al comportamiento de la primera. Para simular este efecto se impone una gravedad adicional en el estudio, aunque aún con ella no se llega a representar una simulación totalmente real.

En cuanto a los resultados obtenidos a partir de las simulaciones, y comparándolos con los obtenidos a partir de los experimentos puede afirmarse una concordancia entre ambos.

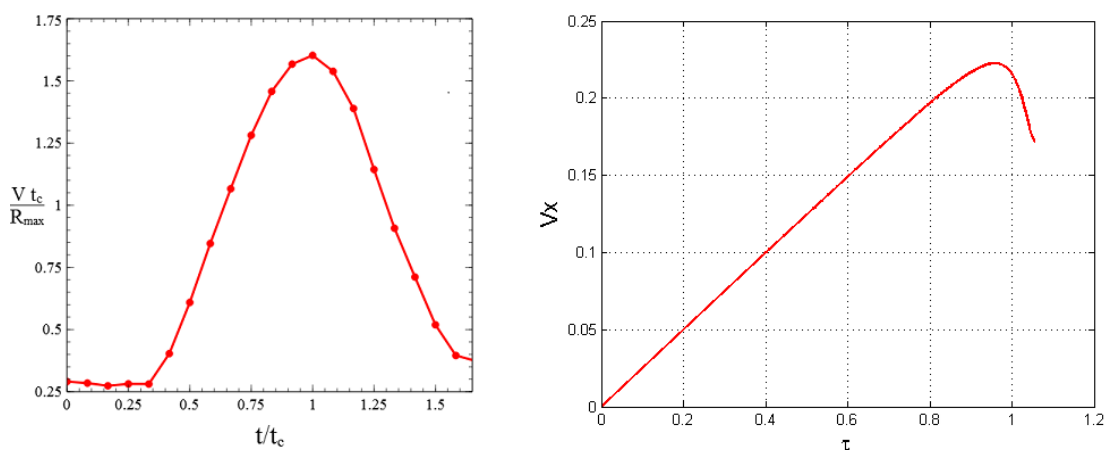


Figura 6.1.: Comparación de la velocidad de una burbuja con deformaciones no esféricas de su entrefase sin formar jet. Izquierda: Resultados experimentales. Derecha: Resultados teóricos

En la “Figura 6.1.” se realiza una comparación entre las velocidades obtenidas a partir de los resultados experimentales y a partir de la resolución numérica de una burbuja que se deforma perdiendo la simetría esférica pero que no llega a formar jet. Como se ha explicado durante los cálculos, en los resultados experimentales la velocidad máxima se alcanza en un tiempo igual al tiempo de implosión porque este viene impuesto por la propia adimensionalización. Sin embargo, obteniendo la velocidad de la burbuja mediante cálculos numéricos se comprueba que la máxima se obtiene instantes antes.

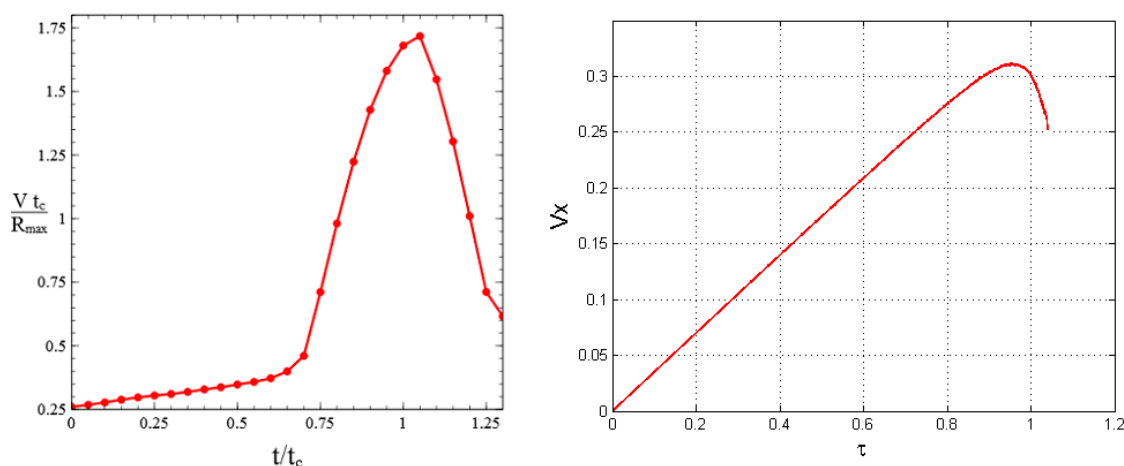


Figura 6.2.: Comparación de la velocidad de una burbuja con deformaciones no esféricas de su interfase formando jet. Izquierda: Resultados experimentales. Derecha: Resultados teóricos

De la misma manera, en la “Figura 6.2.” se muestran las velocidades, tanto a partir de los resultados experimentales como de los resultados teóricos, para un caso en el que la burbuja se deforma de manera asimétrica pero sí llega a formar un chorro. Como en el caso anterior, y por los mismos motivos, la velocidad máxima alcanzada en los resultados numéricos aparece instantes previos al tiempo de colapso, fijado a partir de los experimentos. Pero además, en este caso cabe comentar que en los resultados experimentales, la máxima velocidad aparece en instantes ligeramente posteriores al tiempo de colapso, y esto es fruto también del hecho de que para adimensionalizar el tiempo se ha utilizado el tiempo de colapso obtenido para el caso sin jet. La velocidad es mayor para este caso en el que se forma jet que para el caso en el que no durante toda la evolución, aunque ambas se mantienen en el mismo orden de magnitud. Cabe destacar además que, en el caso con formación de jet, la burbuja se acelera más bruscamente según los cálculos experimentales, fenómeno que no se aprecia según los teóricos.

Así pues, aunque no se pueda realizar una valoración a nivel cuantitativo, sí puede concluirse que, a nivel cualitativo, la evolución de la velocidad es similar en los dos casos en los que se basa el estudio.

También se ha llevado a cabo un estudio sobre el volumen de la burbuja a lo largo de la etapa de colapso, llegándose a la conclusión de que la curva de volumen de la burbuja no varía en función de los parámetros de partida. Por tanto, sí se observa un cambio en la forma de la burbuja pero no en el volumen contenido en ella. Además, se ha podido comprobar que el volumen mínimo aparece instantes después del tiempo de colapso, y que éste no ocurre tan sólo en un instante de tiempo concreto, sino que se mantiene durante unos momentos.

Al finalizar el estudio puede afirmarse que quizá sea necesario refinar más el problema para entrar en mayor profundidad, porque puede haber hechos que ocurren momentos antes del colapso que no se están valorando en este trabajo, y así obtener conclusiones más detalladas.

Finalmente, hay que resaltar que el hecho de que se obtengan velocidades del mismo orden en ambos casos, con y sin formación de jet, indica que existe un régimen muy interesante en el que no permanece la burbuja del todo esférica pero está lejos de formar jet. Es precisamente

en este régimen en el que la burbuja tiene una mayor estabilidad y es más difícil que llegue a romperse. Además, sufre un desplazamiento importante del mismo orden que sufriría con jet. Es por esta última razón por la que este estudio cobra una gran importancia en el desarrollo de diferentes aplicaciones, sobretodo en el ámbito de la medicina.

Se trata pues de un tema que está en proceso de investigación y del que se espera que se puedan obtener avances próximamente en diferentes campos, pero el motivo principal por el que se mantiene en desarrollo es por la posibilidad de conseguir ventajas médicas mediante el procesamiento de estas burbujas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] National Institute of Biomedical Imaging and Bioengineering, *"Drug Delivery Systems: Getting Drugs to Their Targets in a Controlled Manner"* [En línea]. [Citado el: 04 de 07 de 2015]. Disponible en: <http://1.usa.gov/1VfcrqE>
- [2] Dr. med. Dagobert Tutsch, Dr. med. Norbert Boss, Dr. med. Günter Wangerin, Brigitte Bertschinger, Siegfried Parzhuber, Christa Striebeck und Hans Tiroch, *"Roche Lexikon Medizin"*. Munich: Urban & Schwarzenberg, 1987.
- [3] Mónica González, *"Sonoquímica"* [En línea]. 29 de Julio de 2010. [Citado el 12 de 07 de 2015]. Disponible en: <http://bit.ly/1LTA7qw>
- [4] Antonio L. Sánchez and Javier Rodríguez-Rodríguez, *"Fluid Mechanics: an Introduction and some Relevant Applications"* Fluid Mechanics Group, 2011.
- [5] Hao Lin, Brian D. Storey, Andrew J. Szeri, *"Inertially Driven Inhomogeneities in Violently Collapsing Bubbles: The Validity of the Rayleigh-Plesset Equation"* [En línea] 2002. [Citado el: 21 de 08 de 2015]. Disponible en: <http://bit.ly/1QEPDdj>
- [6] R. Ramírez, M. Jácome, A. Giraldo, et al. *"Solución de la ecuación de Rayleigh-Plesset por medio del método del elemento finito"*. Ingeniería y Ciencia, 2013.
- [7] Christopher E. Brennen. *"Fission of collapsing cavitation bubbles"*. J. Fluid Mech. Cambridge University Press, 2002.